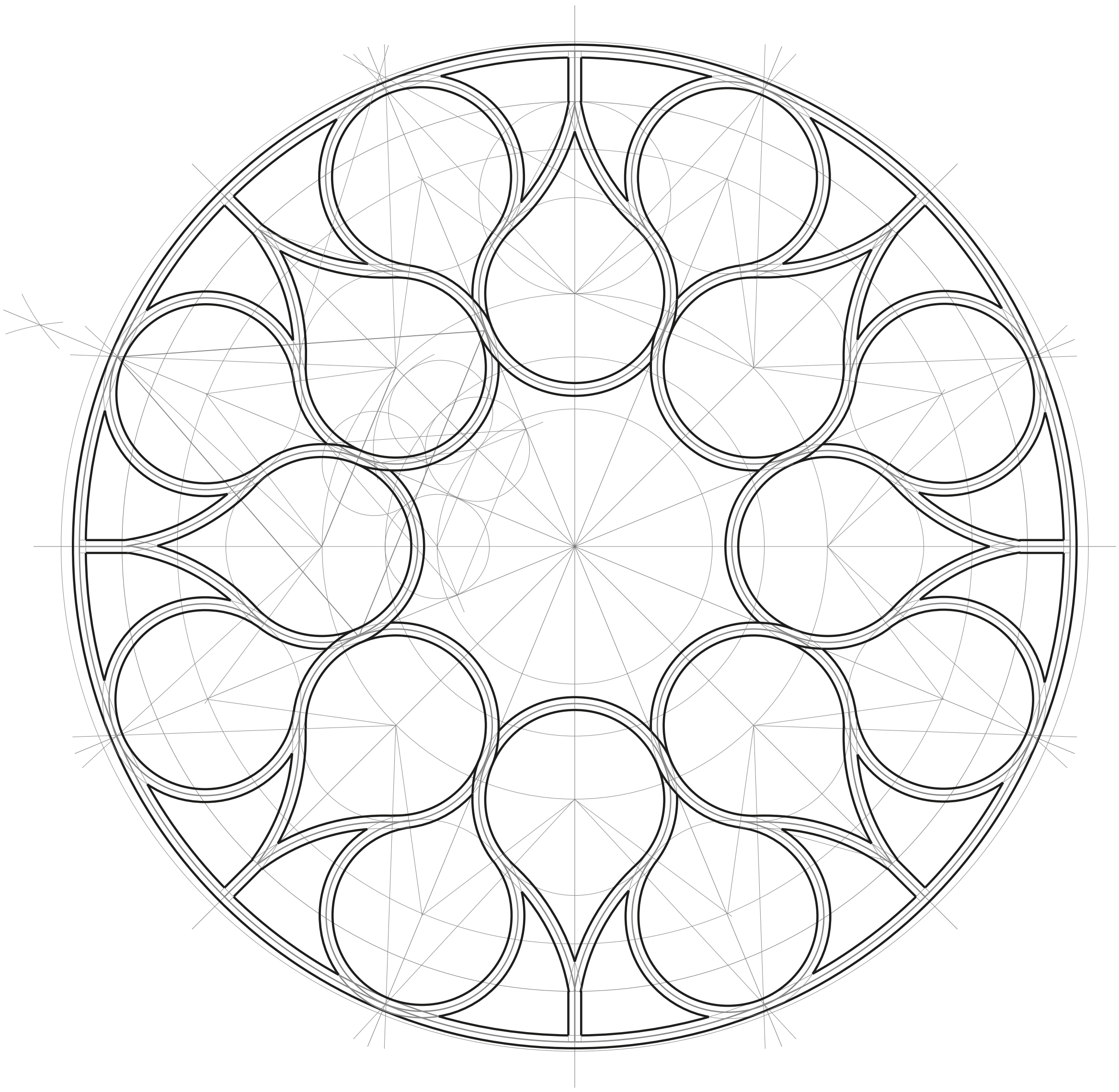
3- TANGENCIAS Y CURVAS



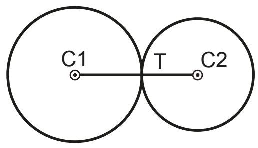
Tangencias y Enlaces

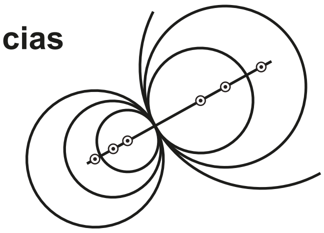
Dos elementos son **tangentes** cuando tienen un punto en común denominado punto de tangencia. Estos elementos son circunferencias, arcos de circunferencia, rectas y en algunos casos también curvas cónicas.

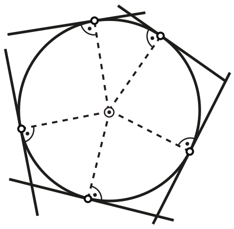
Un **enlace** es la unión armónica de curvas con curvas o curvas con rectas. Los enlaces son la aplicación práctica de las tangencias.

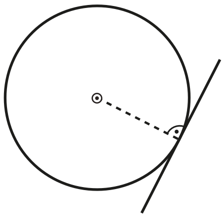
Propiedades fundamentales de las tangencias

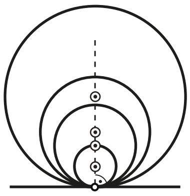
1- Los centros de dos circunferencias tangentes entre sí están alineados con el punto de tangencia.





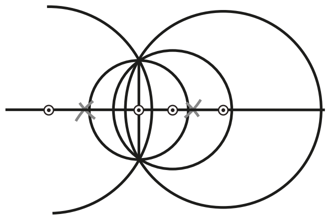


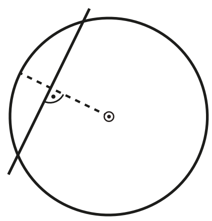


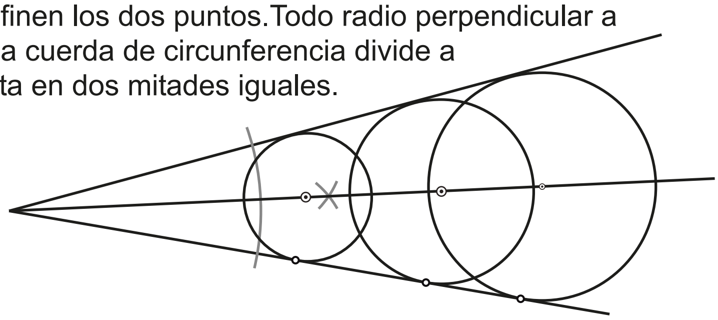


2- Una recta tangente a una circunferencia es siempre perpendicular al radio correspondiente al punto de tangencia.

3- El centro de cualquier circunferencia que pasa por dos puntos se encuentra en la mediatriz del segmento que definen los dos puntos.Todo radio perpendicular a una cuerda de circunferencia divide a esta en dos mitades iguales.



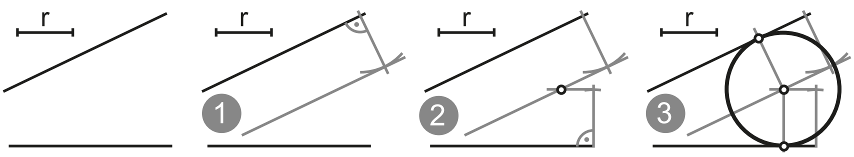




4- El centro de cualquier circunferencia tangente a dos rectas se encuentra en la bisectriz del ángulo que estas producen.

EJERCICIOS TANGENCIAS DADOS DOS ELEMENTOS (rectas o circunferencias) y el radio de la circunferencia solución.

Dadas dos rectas, trazar la circunferencia de radio r tangente a ambas.

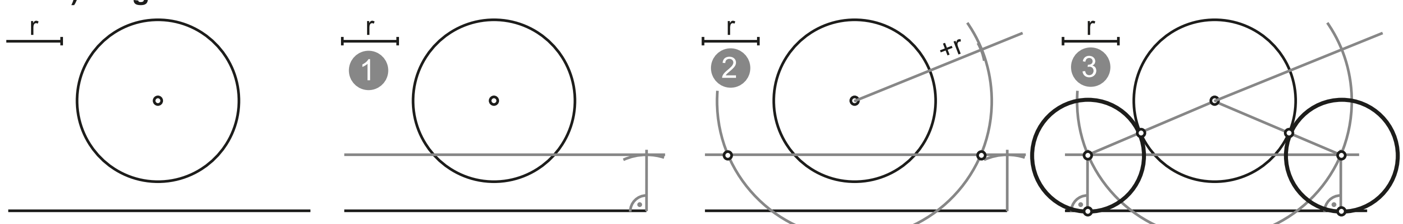


1º- Trazamos una paralela a una distancia r de una recta.

2º- Hacemos lo mismo con la otra recta. Donde las paralelas se cortan es el centro de la solución.

3º- Desde el centro trazamos perpendiculares a las rectas del enunciado para hallar los ptos. de tg. Trazamos la cir.

Dada una recta y una circunferencia, trazar la circunferencia de radio dado r (menor al radio de la dada) tangente a ambas.



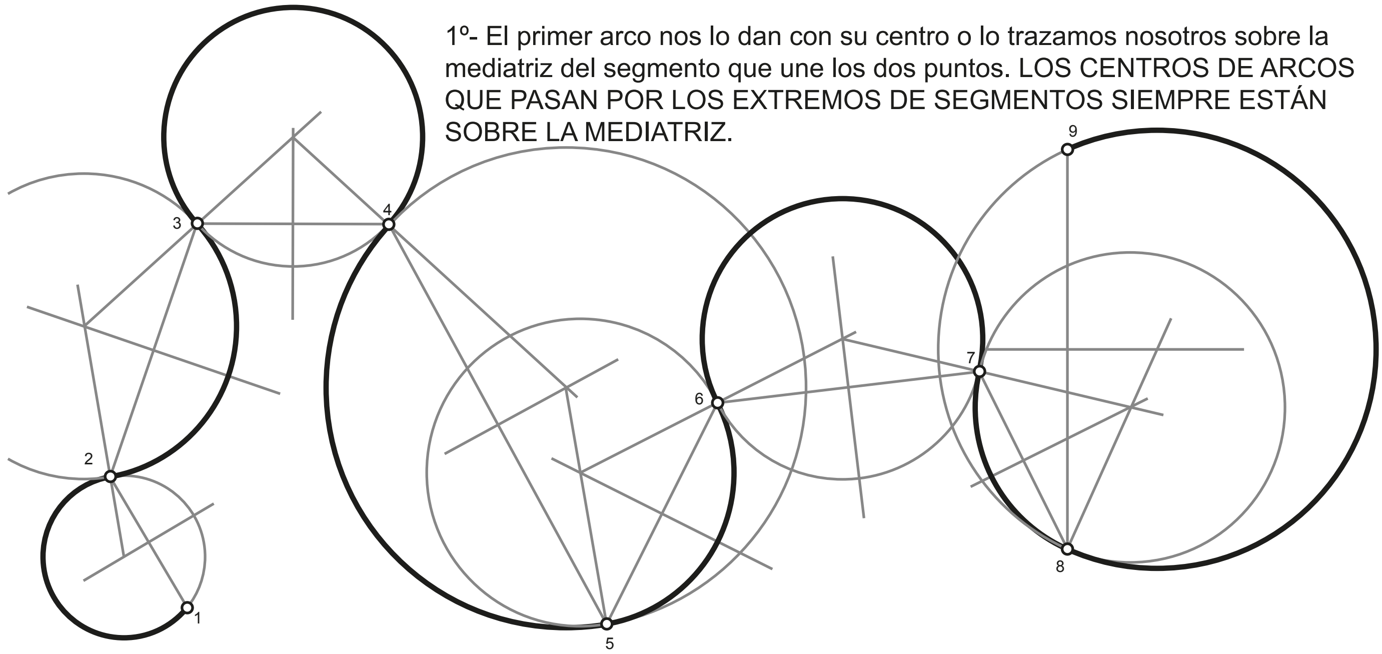
1º- Trazamos una paralela a una distancia r de la recta.

2º- Trazamos un arco concéntrico a la dada de radio (+r). Conseguimos esto trazando un radio arbitrario y a partir del punto de corte con la circunferencia transportar la medida (r). Los puntos de intersección con la recta paralela serán los centros de las circunferencias soluciones. (coincidencia de sos lugares geométricos)

3º- Hallamos los puntos de tangencia: a partir de los centros perpendiculares a las rectas y segmentos con el otro extremo en la circunferencia de la dada. Trazamos las circunferencias que solucionan el problema.

ENLACES DE PUNTOS MEDIANTE ARCOS DE CIRCUNFERENCIAS TANGENTES

1º- El primer arco nos lo dan con su centro o lo trazamos nosotros sobre la mediatriz del segmento que une los dos puntos. LOS CENTROS DE ARCOS QUE PASAN POR LOS EXTREMOS DE SEGMENTOS SIEMPRE ESTÁN SOBRE LA MEDIATRIZ.



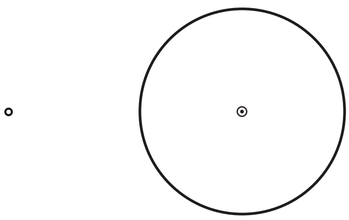
2º- Podemos unir los puntos con segmentos a medida hacemos los arcos o unirlos todos al principio.

3º- A cada segmento le trazaremos su mediatriz. Uniremos el último punto de cada arco con su centro y en la prolongación de esa recta, SOBRE LA MEDIATRIZ, encontraremos el siguiente arco.

4º- Procederemos del mismo modo hasta acabar los puntos.

RECTAS TANGENTES CIRCUNFERENCIA PUNTO

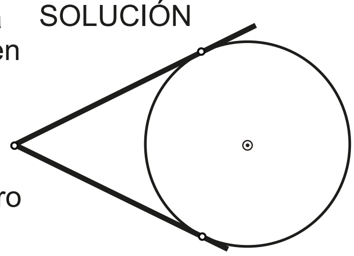
ENUNCIADO



En el enunciado se presenta una circunferencia con su centro y un punto exterior a ella. Se piden las rectas tangentes a la circunferencia que pasan por el punto exterior

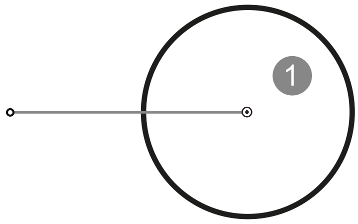
Para resolverlo necesitamos trazar ciertos trazados auxiliares que se pueden explicar cuatro pasos

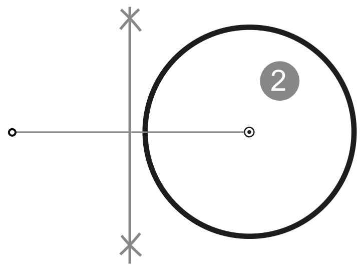
SOLUCIÓN



1º- Unimos el centro de la circunferencia con el punto exterior a ella trazando un segmento.

2º-Trazamos la mediatriz del semento obteniendo el punto medio de este.

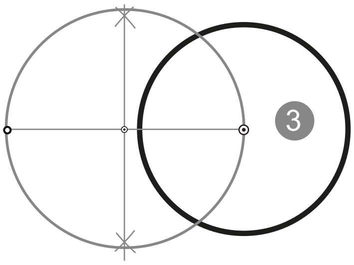


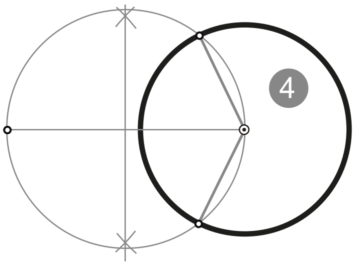


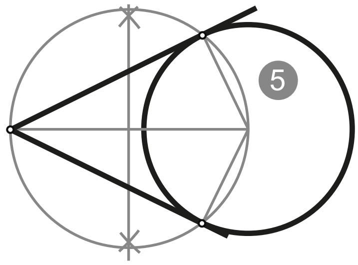
3º- Con centro en el punto medio y radio hasta el punto exterior o el centro (lo cual es lo mismo), trazamos una circunferencia que corta a la dada en dos puntos, los puntos de tangencia.

4º Trazamos radios hasta los puntos de tangencia

5º Desde el punto exterior hasta los puntos de tangencia trazamos las rectas que son solución

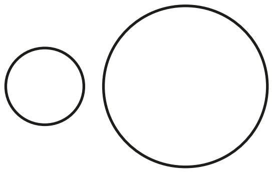




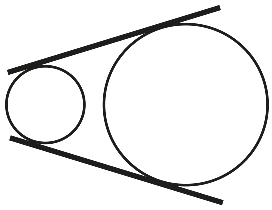


Tangentes exteriores e interiores a dos circunferencias

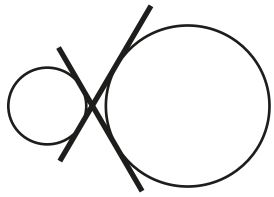
ENUNCIADO



SOLUCIÓN tangentes exteriores



SOLUCIÓN tangentes interiores



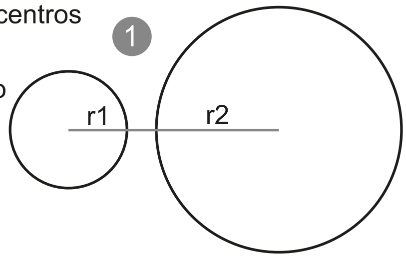
Para resolver estos dos problemas necesitamos reducirlos al problema pto-circunferencia. Tendremos que hacer el esfuerzo de "olvidarnos" (ignorar visualmente) el enunciado original y resolver el problema pto-circunferencia. Una vez conseguido el resultado del problema original no trae mas dificultad que llevar las rectas y los radios a su sitio trazando paralelas con escuadra y cartabón

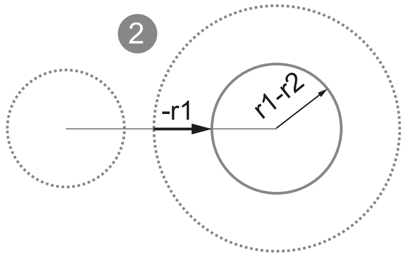
Tangentes exteriores a dos circunferencias

1º Trazamos el segmento que une los dos centros

2º Sobre el segmento, a la circunferencia grande, con el compás, le restamos el radio de la circunferencia pequeña.

De este modo hemos reducido el problema a rectas tangentes punto-circunferencia

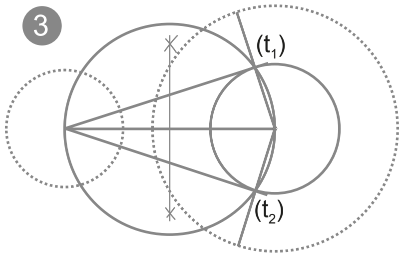


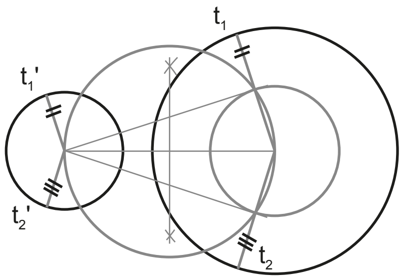


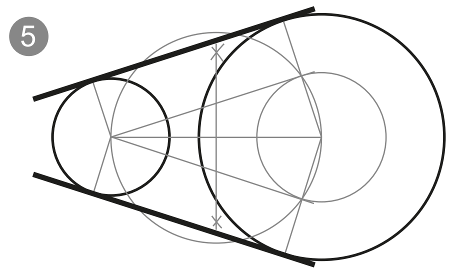
3º- Resolvemos el problema reducido, trazamos los radios que van a (t_1) y (t_2) lo suficientemente largos para que corten a la circunferencia grande original.

4º- A partir del centro de la circunferencia pequeña original trazamos radios con la misma inclinación (escuadra y cartabón). Así,con los cuatro radios trazados obtenemos t_1 yt_2 sobre la grande y t_1' yt_2' sobre la pequeña

5º- Unimos t1 con t1' y t2 con t2'





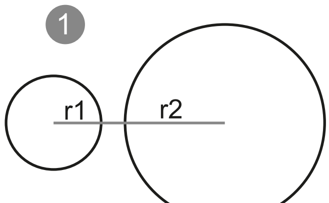


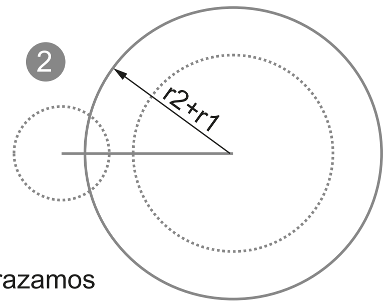
Tangentes interiores a dos circunferencias

1º Trazamos el segmento que une los dos centros

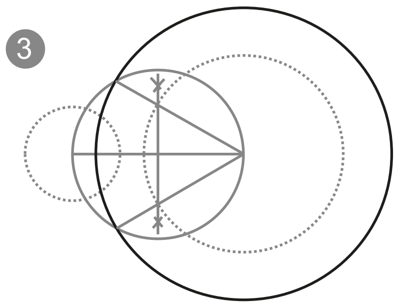
2º Sobre el segmento, a la circunferencia grande, con el compás, le sumamos el radio de la circunferencia pequeña.

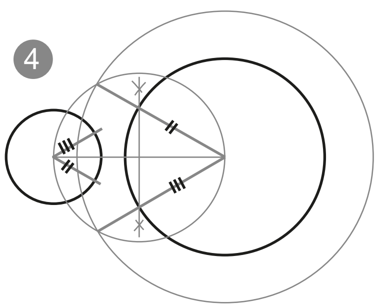
De este modo hemos reducido el problema a rectas tangentes punto-circunferencia.

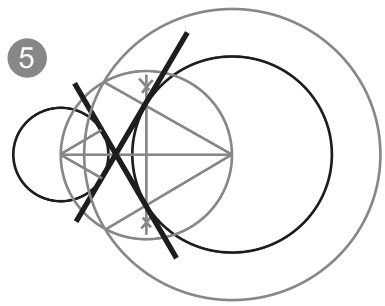




3º- Resolvemos el problema reducido,obteniendo así (t1) y (t2), pero esta vez no trazamos las rectas tangentes para no contaminar con demasiadas líneas el dibujo.





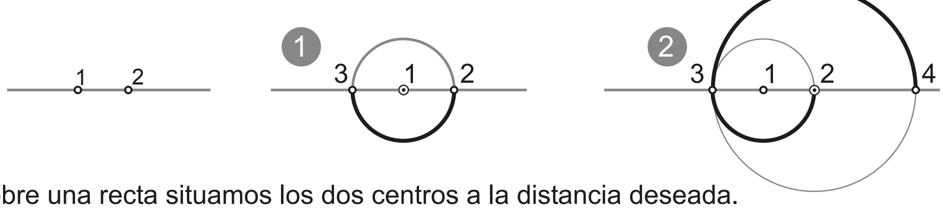


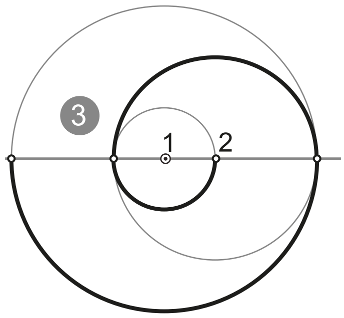
4º- Trazamos radios paralelos a los de la circunferencia grande en la circunferencia pequeña, pero invirtiendo su posición (el radio de arriba en la grande, abajo en la pequeña y viceversa). Los puntos de tangencia del problema original se encuentran en las intersecciones de los radios.

5º- Unimos t1' con t1 y t2' con t2.

Una espiral es una curva abierta y plana que da vueltas alrededor de un punto alejándose de él. El paso de la espiral es la distancia entre dos vueltas o espiras consecutivas.
A las **espirales** también se les denomina **volutas**, aunque a una voluta también se las denomina como **espiral poligonal**. Una espiral poligonal es una curva formada por arcos tangentes interiores entre sí con centros en los vétices de un polígono.

Trazado de una espiral de dos centros: L5a





Sobre una recta situamos los dos centros a la distancia deseada.

1º- Con centro en 1 y radio 1-2 trazamos una semicircunferencia que nos da el punto 3.

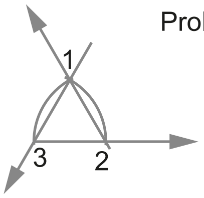
2º- Con centro en 2 y radio 2-3 trazamos una semicircunferencia, en el lado opuesto a la primera. Obtenemos el punto 4.

3º- Con centro en 1 de nuevo, trazamos una semicircunferencia de radio 1-4, obteniendo el punto 5.

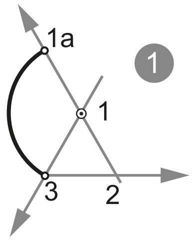
Se trata de alternar los centros uno y dos, trazando semicircunferencias concéntricas, siempre en el mismo lado para cada centro y abriendo el compás el radio máximo posible en cada paso.

Trazado de una espiral de tres centros situados en los vertices de un triángulo equilatero: L5b

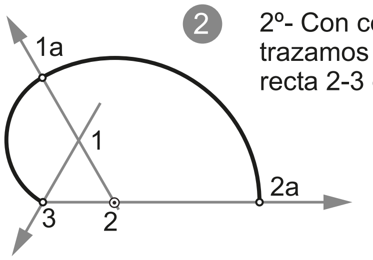
Trazamos un triángulo equilátero (el paso de la espiral es la magnitud del lado del triángulo)



Prolongamos cada lado por uno de sus extremos.



1º- Con centro en 1 y radio 1-3 trazamos un arco que corta a la recta 1-2 en el punto 1a.

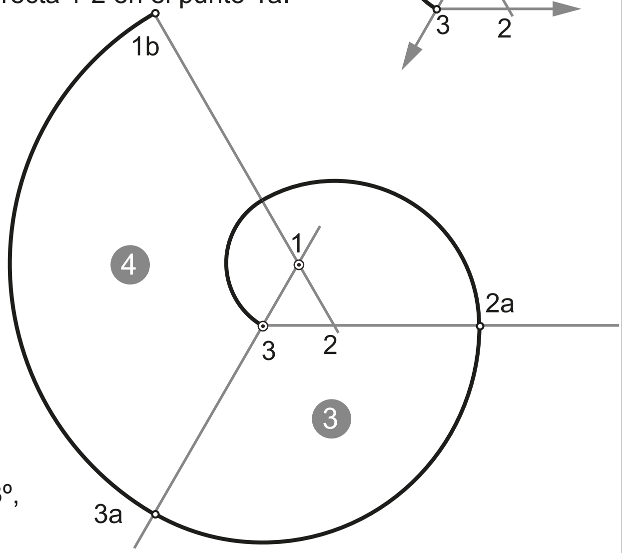


2º- Con centro en 2 y radio 2-1a trazamos un arco que corta a la recta 2-3 en el punto 2a.

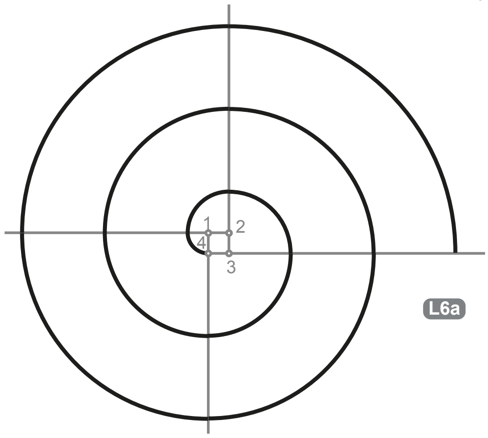
3º- Con centro en 3 y radio 3-2a trazamos un arco que corta a la recta 1-3 en el punto 3a.

4º- Con centro en 1 de nuevo y radio 1-3a trazamos el arco que sobre la recta 1-2 nos da el punto 1b.

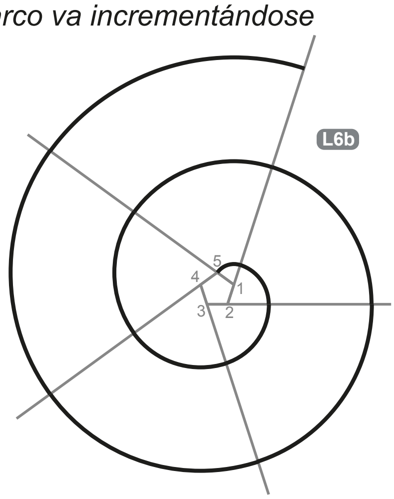
A partir de ahí trazaremos los arcos siguiendo los pasos 1º, 2º y 3º, pero con radios hasta los puntos xb, xc, xd...



Observar, en ambas espirales, como cada sector de arcos siempre tiene el mismo centro, es decir, para formar la espiral trazamos arcos concéntricos. El diametro o rádio de cada arco va incrementándose sucesivamente en función del paso y del nº de centros.



Demás espirales poligonales todas se trazan siguiendo el mismo procecimiento que la espiral de tres centros. En est página se muestran dos espirales de cuatro y de cinco centros pero se puede seguir aumentando el número de vértices.



El **óvalo** es una curva cerrada y plana que está compuesta por cuatro, o más, arcos de circunferéncia simétricos entre sí. Suele venir definido por dos ejes que marcan sus dimensiones y sirven de ejes de simetría de los arcos. Se emplea frecuentemente en perspectivas axonométricas para representar la circunferencia vista en perspectiva.

El **ovoide** es un caso particular de óvalo, se define por dos ejes perpendiculares entre sí: el mayor que actua de eje de simetría y el menor menor, perpendicular al primero.

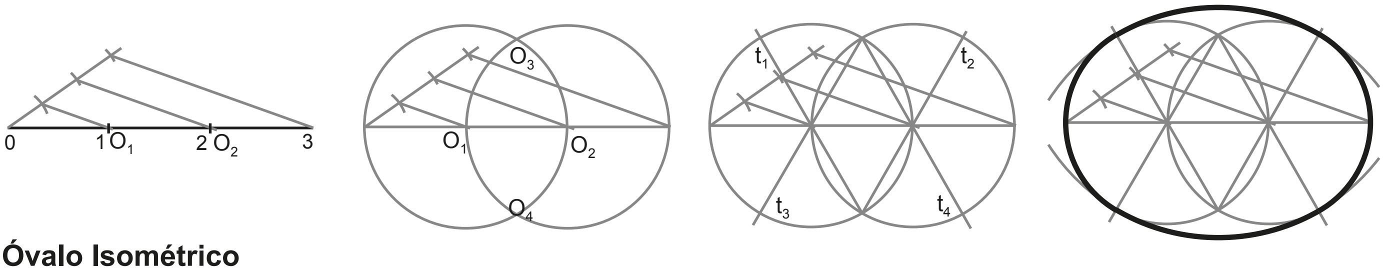
Óvalo dado el eje mayor (metodo 1)

1º- Dividimos el eje mayor dado en tres partes iguales. Los dos puntos que lo dividen serán dos de los centros

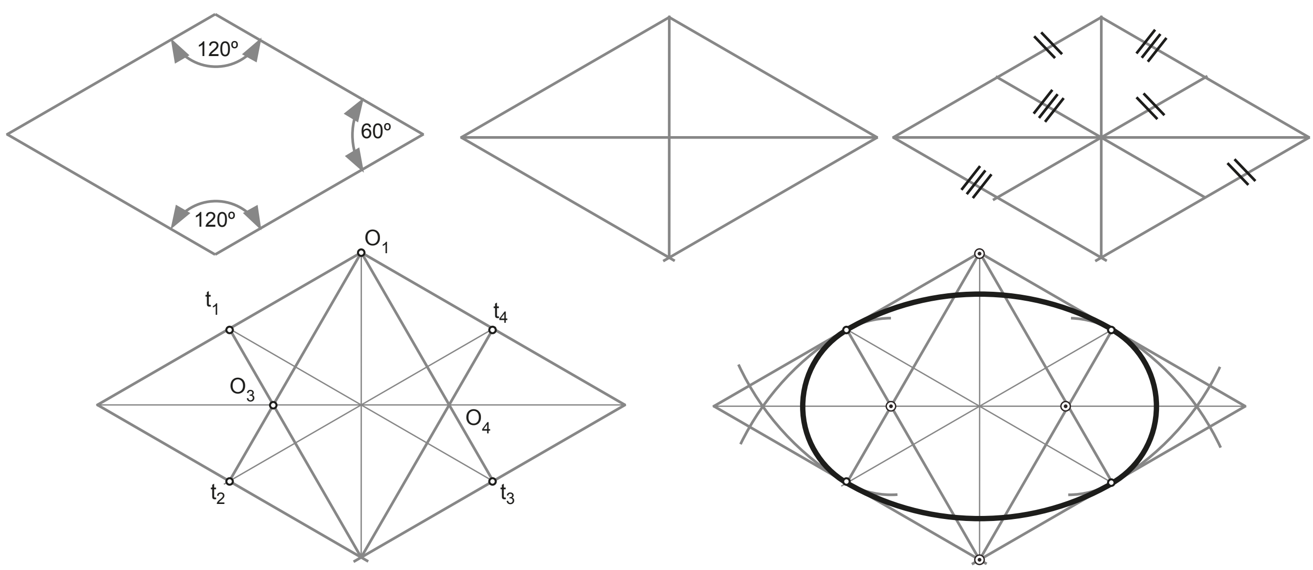
2º- Trazamos dos circunferencias desde O_1 y O_2 y radio hasta los extremos del eje, los dos puntos de intersección serán los otros dos centros del óvalo.

3º- Unimos O_3 y O_4 con O_1 y O_2, los puntos en que las rectas cortan las dos circunferencias trazadas serán los puntos de tangencia.

4º- Desde O3 y O4 trazamos los arcos que completan el óvalo.



Óvalo Isométrico



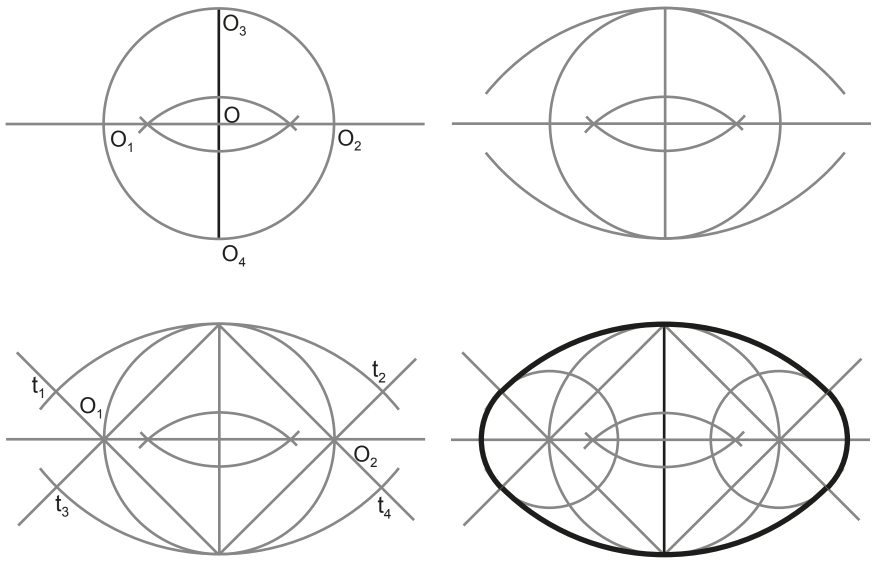
Óvalo dado el eje menor

1º- Colocando el eje dado en posición vertical, trazamos su mediatriz y desde su punto medio (O) trazamos una circunferencia con diámetro igual al eje dado, obteniendo así los cuatro centros del óvalo.

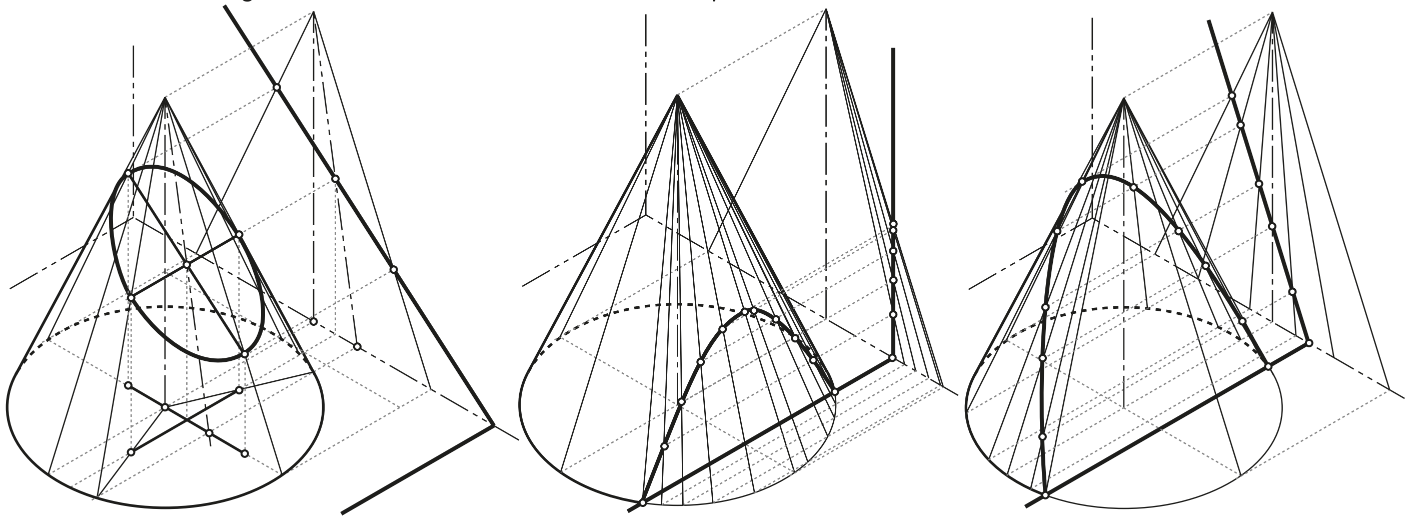
2º- Desde los extremos del eje menor trazamos dos arcos de radio igual a la totalidad del mismo.

3º- Unimos O_3 y O_4 con O_1 y O_2 obteniendo sobre ambos arcos los puntos de tangencia.

4º- Con centro en O1 y O2 trazamos los arcos necesarios para completar el óvalo abriendo el compás hasta los puntos de tangencia.

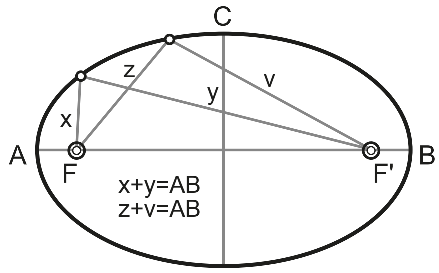


Si seccionamos el cono con un plano paralelo a dos de sus generatrices obtenemos una hipérbola.Si lo seccionamos por un plano paralelo a una y solo una arista la sección es una parábola. Y si seccionamos el cono por un plano oblicuo a todas las generatrices del cono se obtiene una elipse.



LA ELIPSE:

"la elipse es el conjunto de puntos cuya suma de radio vectores (distancias desde la elpise a los dos focos) es constante e igual al eje mayor".



Elementos paramétricos: son las tres magnitudes que caracterizan la elipse.

1. **Eje mayor** AB: Es eje de simetría.
2. **Eje menor** CD: También es eje de simetría

Ambos ejes son perpendiculares entre sí cortándose en sus puntos medios.

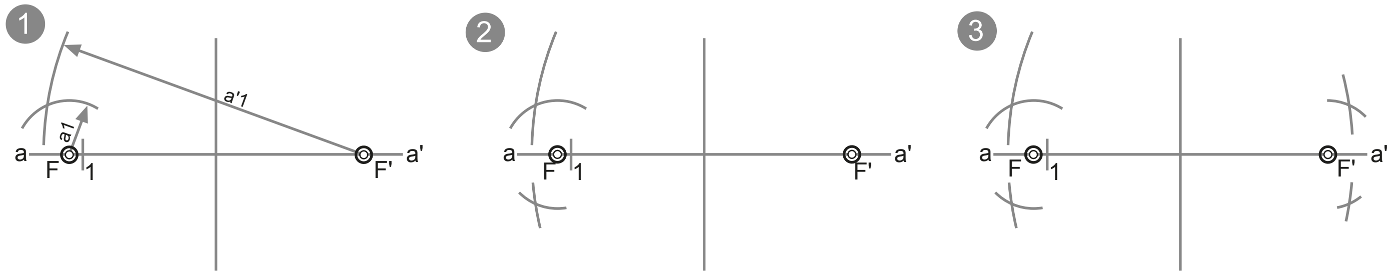
3. **Focos F, F'**: Puntos fijos sobre el eje mayor, de referencia de distancias

Trazado de la elipse por puntos

1º- Marcamos un punto arbitrario (1) sobre el eje mayor. Con centro en F y radio a1 trazamos un arco en el primer cuadrante de la elipse y con centro en F' y radio a'1 trazamos otro arco tambien en el primer cuadrante. El punto dónde se cortan ambos arcos pertenece a la elipse ya que se cumple a1+a'1=aa'

2º- Con los mismos radios y los mismos centros podemos obtener el punto simetríco en el tercer cuadrante.

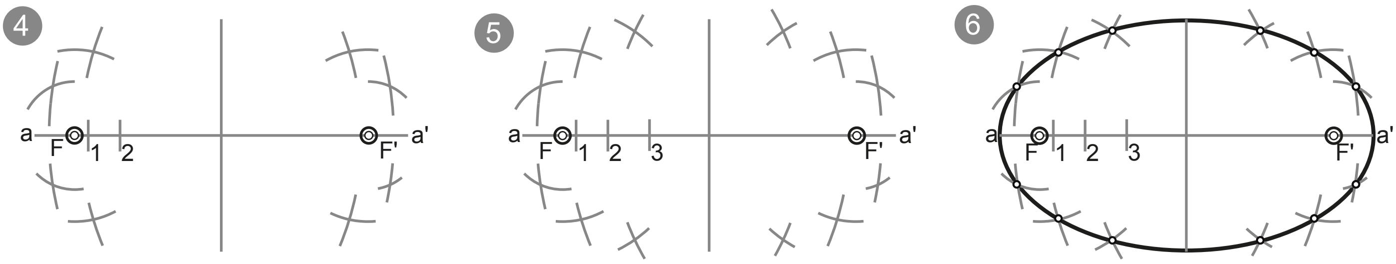
3º- Con los mismos radios pero invirtiendo los centros, hallamos los puntos simétricos respecto a eje menor a los otros dos.



4º- Marcamos otro punto (2) sobre el eje mayor y repetimos la operación de los pasos 2º y 3º, así obtenemos otros cuatro puntos de la elipse

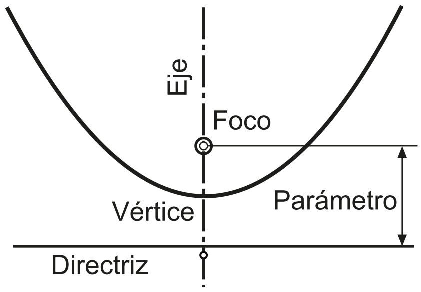
5º- Marcamos un tercer punto y repetimos de nuevo la operación de los pasos 2º y 3º. Con 12 puntos podemos intuir el recorrido de la elipse, aunque podemos repetir la operación para conseguir más puntos.

6º- Unimos los puntos a mano alzada.



LA PARÁBOLA:

"La parábola es el conjunto de puntos que equidistan de un punto fijo llamado foco y una recta llamada directriz.



Elementos paramétricos:

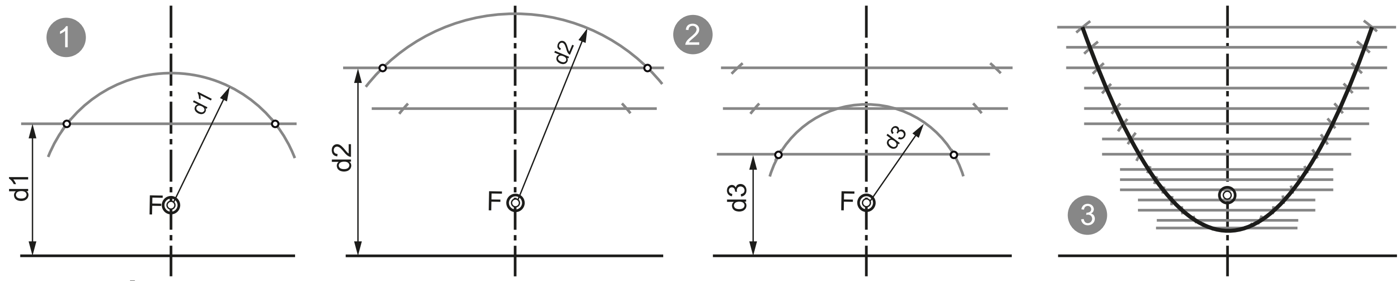
1. **Foco** F
2. **Directriz** d: Perpendicular al eje de simetría.
3. **Vértice** A: Vértice extremo del eje, y por tanto de la curva. Se encuentra en el punto medio entre el foco y la diectriz.

Trazado de la parábola dado el foco y la directriz:

1º- Trazamos una paralela a la directriz a una distancia d. Con centro en F trazamos un arco de radio d que corta a la paralela en dos puntos pertenecientes a la parábola.

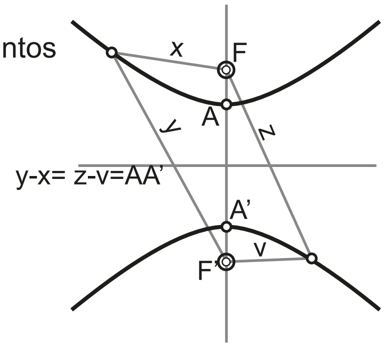
2º- Repetimos este procedimiento tantas veces como pares de puntos simétricos deseemos obtener.

3º- Por último unimos los puntos obtenidos para obtener la parábola.



LA HIPÉRBOLA:

"La hipérbola es el conjunto de puntos cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante e igual a la distancia entre los vértices".



Elementos paramétricos:
son las tres magnitudes que caracterizan la hipérbola.

1. Eje real AA': o principal.
2. Eje imaginario CD: o secundario.

Ambos son perpendiculares entre sí.

3. Focos: puntos fijos sobre el eje AA', de referencia de distancias.

Trazado de la hipérbola dados los focos F y F' y Los vértices A y A':

1º- Tomamos un punto sobre el eje FF'. Con centro en F y radio A1 trazamos un arco y con centro en F' y radio A'1 trazamos otro arco, los dos puntos de intersección de los arcos son puntos de la hipérbola.

2º- Repetimos este procedimiento tantas veces como pares de puntos simétricos deseemos obtener.

3º- Si tomando los mismos radios invertimos los centros (radio A1 con centro en F' y radio A'1 con centro en F, etc. obtendremos los puntos simétricos de la otra rama.