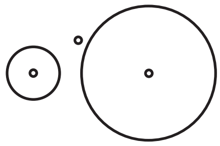
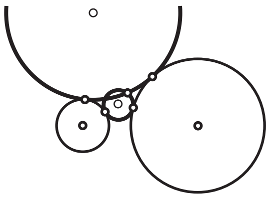
CCP: Trazar las circunferencias tangentes a dos circunferencias que pasan por un punto exterior a ellas.

ENUNCIADO



SOLUCIÓN

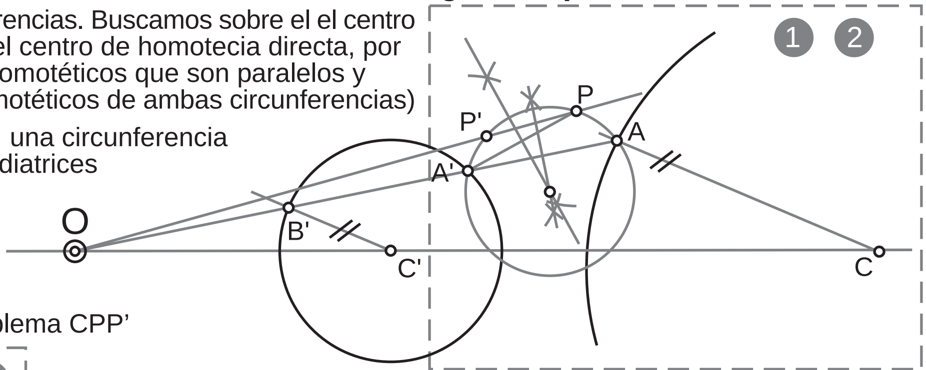


Este problema solo puede ser resuelto por el método reductivo mediante INVERSIÓN. Se trata invertir la circunferencia dada en la otra circunferencia, mediante inversión positiva, lo cual nos dará como soluciones dos circunferencias tangentes exteriores a las dos dadas, en algún caso muy particular podriamos encontrarnos con que una de las circunferencias de la solución. De este modo reducimós el problema a CCP. La inversión positiva nos ofrece dos soluciones de las cuatro posibles

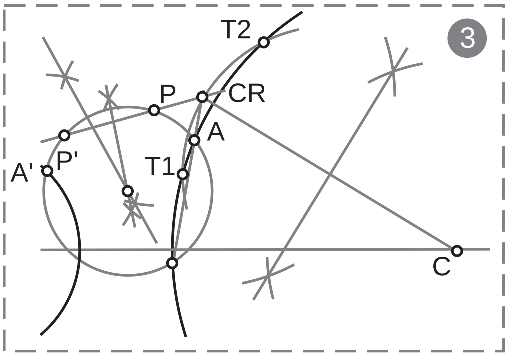
Inversión negativa, k<0. Dos soluciones: circunferencias tangentes que contienen a la dada

1º-Unimos los centros de ambas circunferencias. Buscamos sobre el el centro de inversión positiva (que coincide con el centro de homotecia directa, por ello lo obtenemos trazando dos radios homotéticos que son paralelos y trazando la recta que une los puntos homotéticos de ambas circunferencias)

2º- Hallamos el inverso de P: Trazamos una circunferencia (con centro en la interseccion de las mediatrices de AP y AA') que pasa por A-A'-P. Trazamos la recta OP que corta a la última circunferencia en el inverso de P, P'.



3º- A partir de aquí resolveremos el problema CPP'



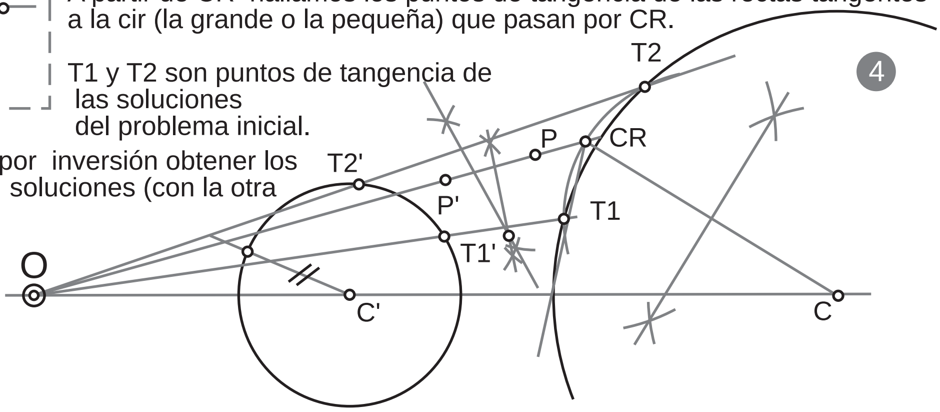
El procedimiento es el mismo que el que resuelve CCP. En este caso OPP' es eje radical de las soluciones. Y trazando una cir. que pase por P y P' y sea secante a la dada (la grande es la que hemos utilizado, pero podriamos elegir cualquiera de las dos dadas en el enunciado) obtenemos otro eje radical auxiliar que en su intersección con el anterior eje radical nos da el centro radical de las soluciones.

A partir de CR hallamos los puntos de tangencia de las rectas tangentes a la cir (la grande o la pequeña) que pasan por CR.

T1 y T2 son puntos de tangencia de las soluciones del problema inicial.

Volvemos al problema origuinal para, por inversión obtener los restantes puntos de tangencia de las soluciones (con la otra circunferencia).

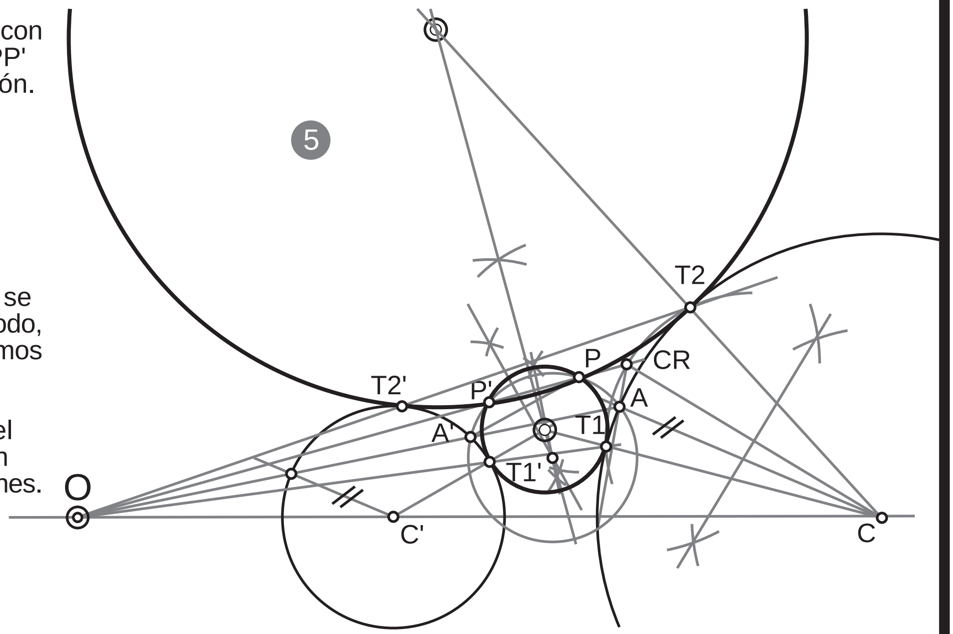
4º-Alineando T1 y T2 con el centro de inversión O obtenemos T1' y T2'



5º- Alineando T1 y T2 con C (o T1' y T2' con C') encontramos sobre la mediatriz de PP' los centros de las circunferencias solución.

Como hemos visto este problema, CCP se reduce a PPC exactamente del mismo modo, mediante inversión positiva, que reducíamos CPR a PPR.

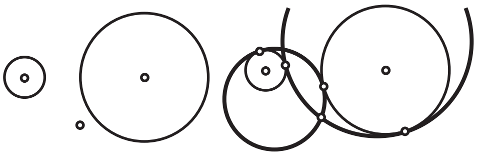
Del mismo modo también reduciremos el problema a PPC, pero con una inversión positiva para obtener las otras dos soluciones.



LOS PROBLEMAS DE APOLONIO: CCP (1)
Dos soluciones mediante inversión positiva

CCP: Trazar las circunferencias tg. a dos cir. dadas y que pasan por un punto exterior a ellas.

ENUNCIADO SOLUCIÓN

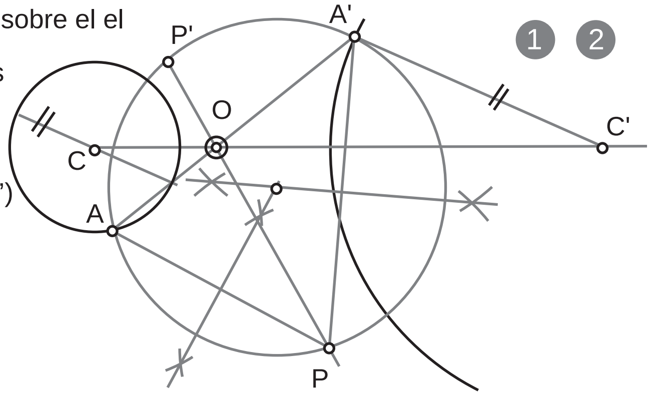


Este problema solo puede ser resuelto por el método reductivo mediante INVERSIÓN. Se trata invertir la circunferencia dada en la otra circunferencia, mediante inversión negativa, lo cual nos dará como soluciones dos circunferencias tangentes a las dos dadas, cada una de las soluciones contendrá a una de las circunferencias dadas. De este modo reducimós el problema a CCP. La inversión negativa nos ofrece dos soluciones de las cuatro posibles

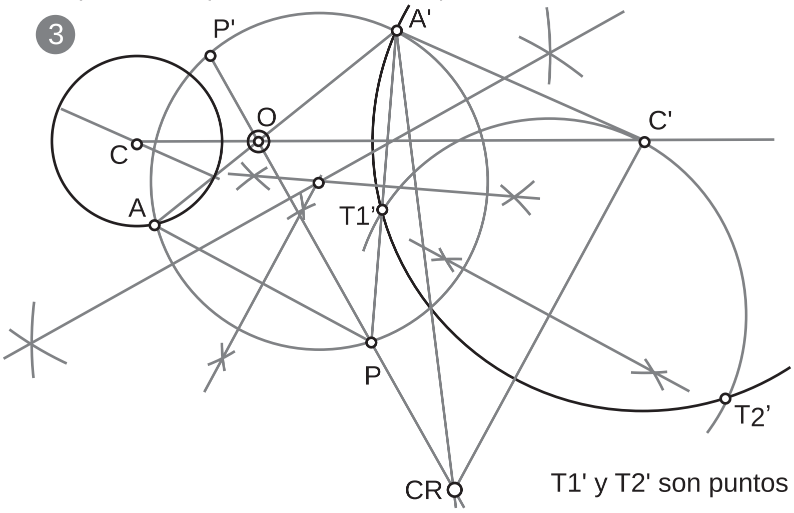
Inversión negativa, k<0. Dos soluciones: cir. tangentes que contienen a una de las dadas

1º-Unimos los centros de ambas circunferencias. Buscamos sobre el el centro de inversión positiva (que coincide con el centro de homotecia directa, por ello lo obtenemos trazando dos radios homotéticos que son paralelos y trazando la recta que une los puntos homotéticos de ambas circunferencias)

2º- Hallamos el inverso de P: Trazamos una circunferencia (con centro en la interseccion de las mediatrices de PA y PA') que pasa por A-A'-P.
Trazamos la recta OP que corta a la última circunferencia en el inverso de P, P'.



3º- A partir de aquí resolveremos el problema CPP'



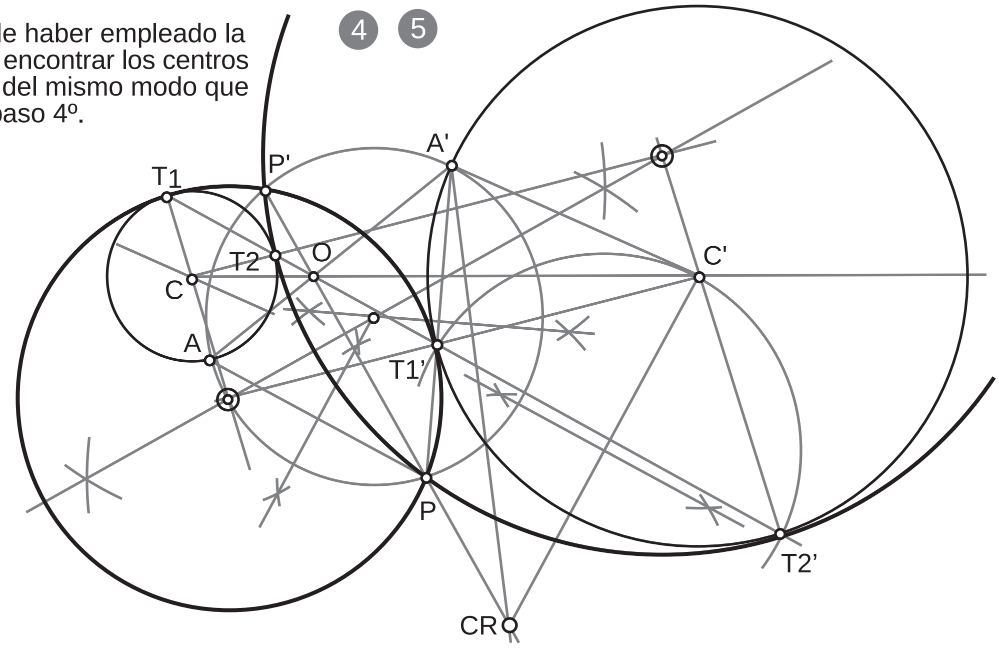
El procedimiento es el mismo que el que resuelve CCP. En este caso OPP' es eje radical de las soluciones. Y trazando una cir. que pase por P y P' y sea secante a la dada (la grande es la que hemos utilizado, pero podriamos elegir cualquiera de las dos dadas en el enunciado) obtenemos otro eje radical auxiliar que en su intersección con el anterior eje radical nos da el centro radical de las soluciones.

A partir de CR hallamos los puntos de tangencia de las rectas tangentes a la cir (la grande o la pequeña) que pasan por CR.

T1' y T2' son puntos de tangencia de las soluciones del problema inicial.

4º- Debemos encontrar T1 y T2. Para ello podemos hacer uso del centro de inversión: Alineando T1' y T2' con O (centro de inversión) encontramos sobre la otra circunferencia los puntos inversos, que son también los puntos de tangencia de las cir. solución con la cir. de menor radio.
Pero también podemos alinear T1' y T2' con C' para hallar los centros de las cir. solución y unir dichos centros con C (centro e la segunda cir. dada) para encontrar así T1 y T2.

5º- Solo nos queda, en el caso de haber empleado la inversión para encontrar T1 y T2 encontrar los centros de las cir. solución. Lo hacemos del mismo modo que muestra la segunda opción del paso 4º.



En las ilustraciones de este problema T1' y T2' (y por lo tanto T1 y T2) quedan alineados con O (centro de inversión). Esta circunstancia es solo casual para las posiciones relativas entre las dos circunferencias y el punto dados.

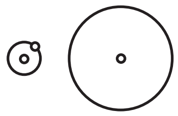
En general T1 y T2 no tienen por que estar alineados con el centro de inversión.

Si conocemos bién el procedimiento de la inversión para el caso estandar de este problema, cuando el punto dado es el punto de tangencia sobre una de las circunferencias dadas el problema queda simplificado sobremanera. Al invertir una de las circunferencias en la otra, o vicebersa, teníamos también que obtener el punto inverso (lo cual rquiere ciertos trazaos auxiliares que complican el ejercicio).

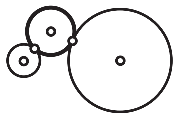
Para los dos casos que se muestran en esta página, al estar el punto contenido en una de las circunferencias, el punto inverso se encontrará sobre su circunferendia transformada lo cual hace posible resolver el problema con muy pocos trazados y muy rápidamente.

CCP: Trazar las circunferencias tangentes a dos circunferencia y una conocido un **punto de tangencia sobre una de las circunferencias**. POR **INVERSIÓN POSITIVA**

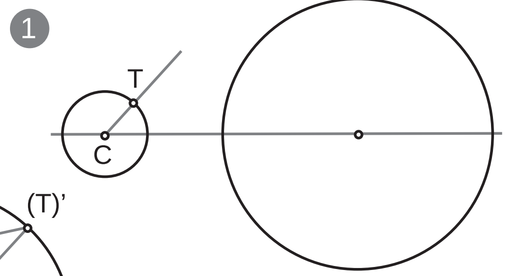
ENUNCIADO



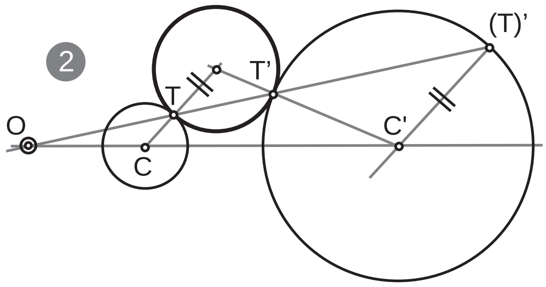
SOLUCIÓN



1º- Los centros de la solución, en cualquier caso, se encontrarán sobre la recta que pasa por el punto de tangencia dado y el centro de la circunferencia a la que pertenece.



2º- A partir de ahí aplicaremos una inversión positiva en problema.
El centro de inversión positiva es el centro de homotecia directa de este modo trazamos una paralela a CT por C' obteniendo el punto nomotético de T (T)'. Uniendo T con (T)' obtenemos O, centro de inversión.



Sobre la recta OT, encontramos el punto T' sobre la circunferencia de centro C'.

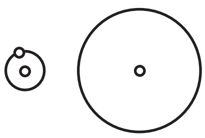
T' es el punto de tangencia de la solución sobre la segunda circunferencia.

Uniendo T y T' con los centros de sus respectivas circunferencias obtenemos una intersección que por teorema fundamental de las tangencias es el centro de la solución.

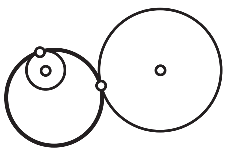
Esta método tiene el inconveniente de, generalmente, tener el centro de inversión algo alejado de las circunferencias dadas, por lo que si no nos dan el problema preparado en función al espacio gráfico, el centro de inversión se sale del límite del papel y su resolución se complica considerablemente. Esto puede suceder en ejercicios donde este problema es solamente uno mas de los varios que el ejercicio pueda contener.

CCP: Trazar las circunferencias tangentes a dos circunferencia y una conocido un **punto de tangencia sobre una de las circunferencias**. POR **INVERSIÓN NEGATIVA**

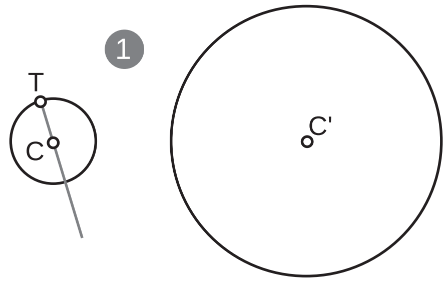
ENUNCIADO



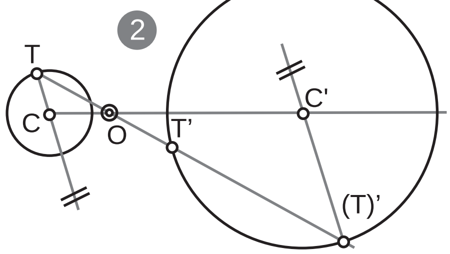
SOLUCIÓN



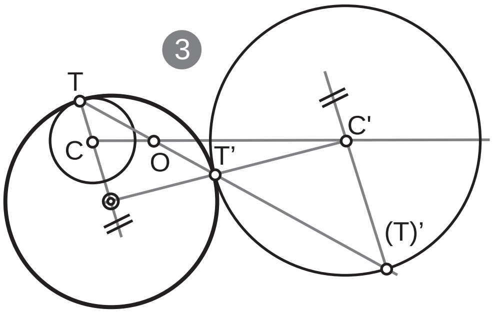
Los centros de la solución en cualquier caso se encontrarán sobre una recta que pasa por el centro de la cir. y el punto de tangencia dados.



2º- INVERSIÓN NEGATIVA: Situamos el centro de inversión (O). Para ello hemos trazado un radio paralelo al radio CT desde C' obteniendo (T)', que es el homotético inverso de T. Uniendo T con (T)' obtenemos el centro O.



Trazando una recta que pasa por T y por O (en este caso ya la hemos trazado para resolver el centro de inversión. Obtenemos otro punto, T', sobre la cir. de centro C', que es el inverso de razon negativa del punto T. este punto es el punto de tangencia de la solución sobre la segunda circunferencia.



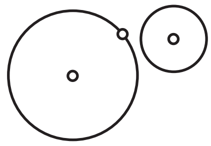
3º- Uniendo C' con T' (propiedad fundamental de las tangencias) obtenemos el centro de la circunferencia solución.

Para ilustrar estos métodos (que en realidad es el mismo a diferencia del signo positivo o negativo de la razón de inversión) hemos cambiado el punto de tangencia por razones de espacio, pero el método no cambia en cualquier caso.

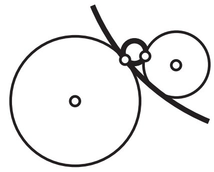
En ambas modalidades de este problema el procedimiento es el mismo, no importa sobre que circunferencia se situe el punto de tangencia dado.

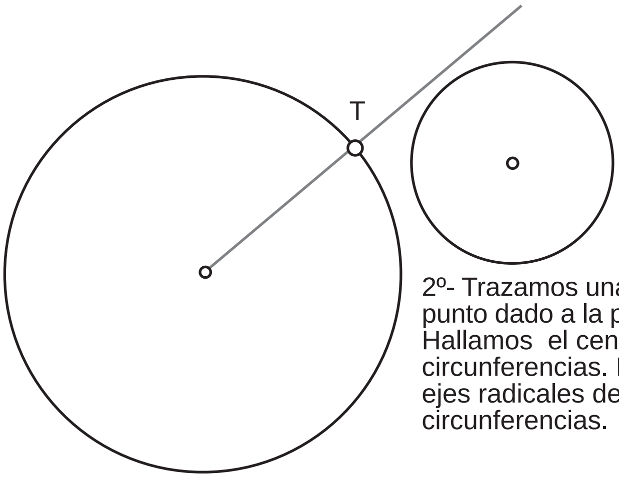
CCP: Trazar las circunferencias tangentes a dos circunferencias conocido un punto de tangencia sobre una de las dos circunferencias dadas. **Resolución por Potencia** (eje radical y centro radical)

ENUNCIADO



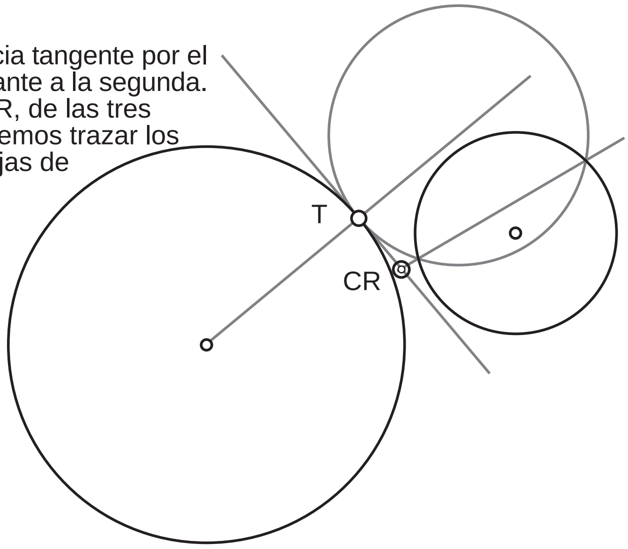
SOLUCIÓN



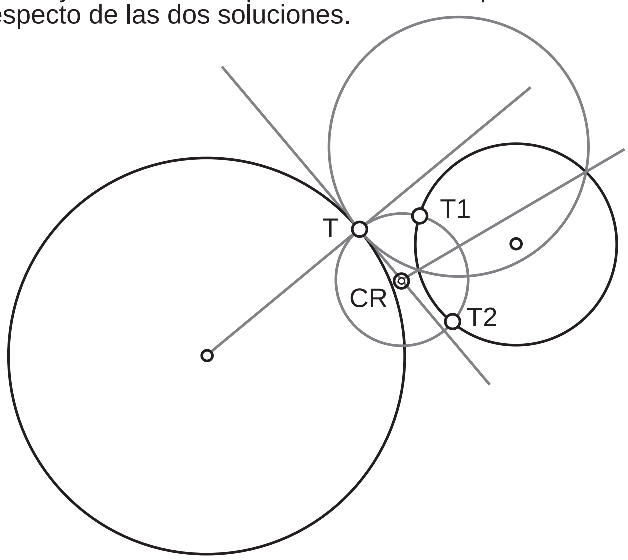


1º- Unimos el centro de la circunferencia con el punto de tangencia. Sobre esta recta estará indiscutiblemente (propiedad fundamental de tangencias) el centro de las soluciones

2º- Trazamos una circunferencia tangente por el punto dado a la primera y secante a la segunda. Hallamos el centro radical, CR, de las tres circunferencias. Para ello debemos trazar los ejes radicales de las dos parejas de circunferencias.



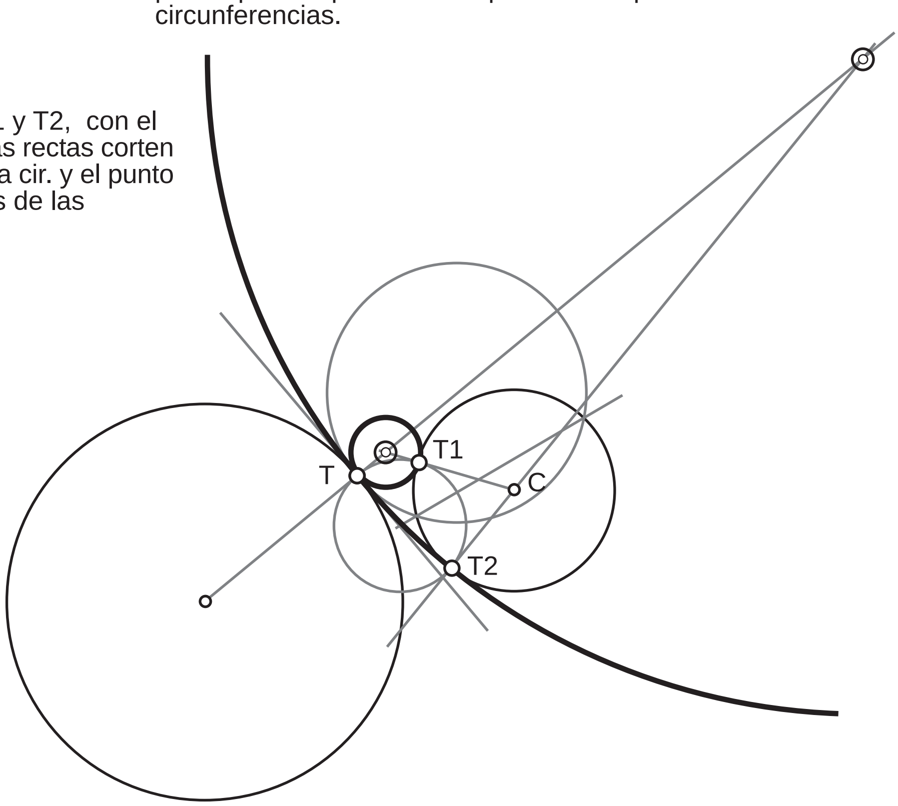
Este centro radical, CR, lo es respecto de las dos circunferencias dadas y de la auxiliar que hemos trazado, pero tambien lo es respecto de las dos soluciones.



3º- Con centro el centro radical CR, trazamos una circunferencia que pasa por el punto de tangencia dado. Los puntos de intersección con la otra circunferencia, T1 y T2 serán los puntos de tangencia de las circunferencias soluciones soluciones.

Esto se debe a que el valor CR-T debe ser el mismo desde CR a los puntos de tangencia de las soluciones al ser CR el punto que cumple la misma potencia respecto a las tres circunferencias.

4º-Unimos estos puntos de tangencia, T1 y T2, con el centro de la circunferencia, C. donde estas rectas corten a la recta que pasa por el centro de la otra cir. y el punto de tangencia dado tendremos los centros de las soluciones.



Este método podría ser más apropiado en el caso de que el centro de inversión positíva se salirea de los límites del papel.

En este caso el centro de una de las circunferencias se aleja bastante del nucleo del ejercicio, pero eso es debido a las posiciones relativas de las dos circunferencias y puntod e tangencia dado que hacen que una de las cir. solución tenga un rádio considerablemente mayor que los de las cir. dadas.