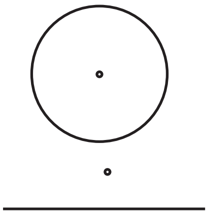
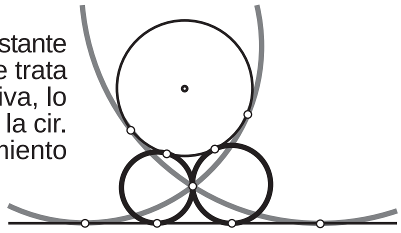
CPR: Trazar las circunferencias tangentes a una circunferencia y a una recta que pasan por un punto exterior a ambas.



ENUNCIADO

Este problema puede ser resuelto mediante distintos métodos. No obstante vamos a desarrollar el método reductivo mediante INVERSIÓN. Se trata invertir la circunferencia dada en la recta,mediante inversión positiva, lo cual nos dará como soluciones dos circunferencias tg. exteriores a la cir. dada. De este modo reducimós el problema a PPR. Este procedimiento nos ofrece dos soluciones de las cuatro posibles para este caso.



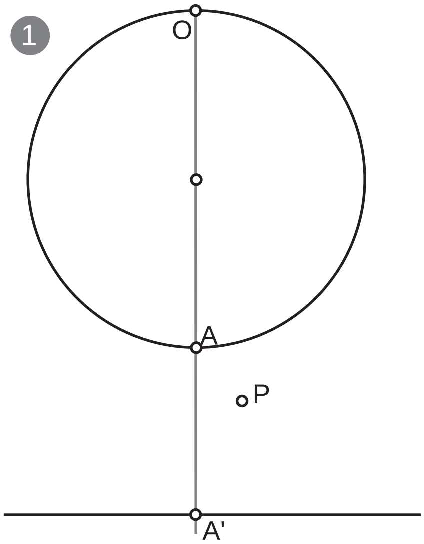
4 SOLUCIÓNES

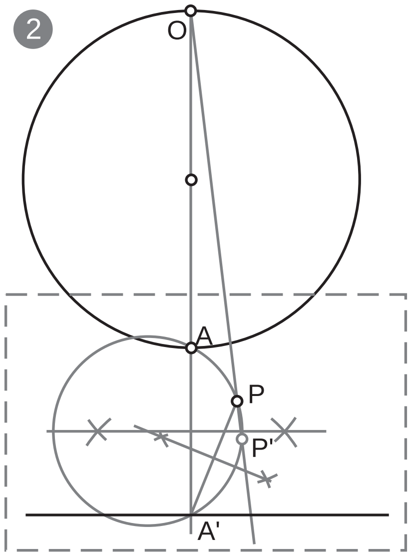
Inversión positiva, k>0. 2 soluciones, circunferencias tangentes exteriores a la dada

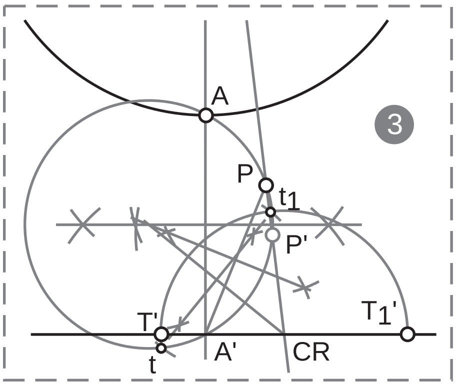
1º- Trazamos una perpendicular a la recta dada pasando por el centro de la cir. Situamos en el extremo superior el centro de inversión (O) siendo el otro extremo del diámetro A y el punto de intersección con la recta dada su inverso A’. Así la recta es la inversa de la circunferencia.

2º- Hallamos el inverso de P: Trazamos una circunferencia (con centro en la interseccion de las mediatrices de AP y PA’) que pasa por A-A’-P. Trazamos la recta OP que corta a la última circunferencia en el inverso de P, P’.

A partir de aquí resolveremos el problema PP’R





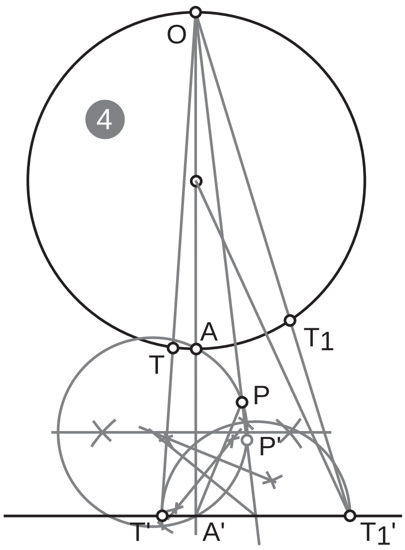


Para aclarar la resolución (que en parte puede ser estudiada en el problema PPR) hemos ampliado el area del problema en que nos vamos a ocupar.

3º- PP’ es un eje radical auxiliar que corta a la recta dada en CR (centro radical auxiliar). trazamos una circunferencia auxiliar que pasa por P-P’ (en este caso nos sirve la trazada para obtener P’) y encontramos los puntos de tangencia de las rectas tangentes desde CR a dicha circunferencia.

Dichos puntos de tangencia son t y t’ (en minusculas y remarcados con circulos menores). Con centro en CR, abatimos la distancia CR-t (CRt_1) sobre la recta dada obteniendo T_1’ y T’. Estos YA son puntos de tangencia de las dos soluciones finales.

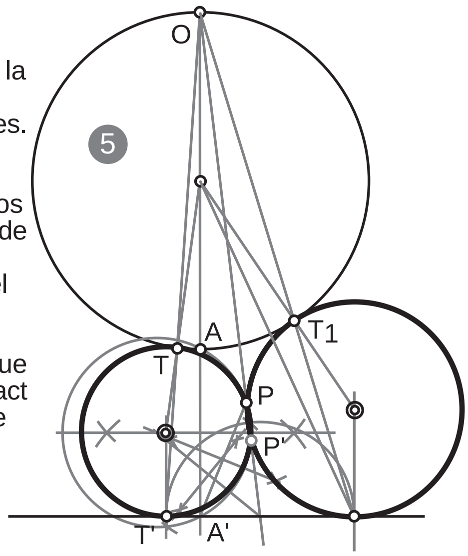
Pero a partir de aquí regresamos al problema inicial aprobechando la inversión para encontrar los inversos de estos puntos sobre la primera circunferencia dada.



4º- Alineamos T’ y T_1’ con O (centro de inversión, encontrando sus inversos sobre la circunferencia, T’ y T_1, estos tambien son puntos de tangencia de las soluciones finales.

5º- Alineando T y T_1 con el centro de la cir. dada y trazando perpendiculares a R por los puntos T’ y T_1’ hallamos intersecciones donde se encuentran los centros de las circunferencias que solucionan la mitad del problema.

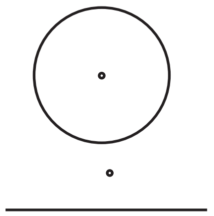
Para encontrar la sotras circunferencias (que contienen a la dada y son tangentes a la react pasando por el punto dado procedemos de igual modo pero transformando la circunferencia en la recta mediante una inversión negativa.



LASLAMINAS.ES

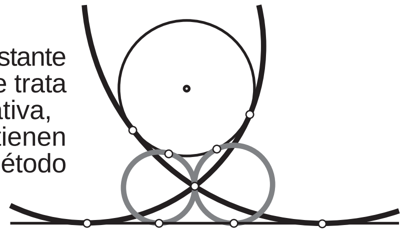
LOS PROBLEMAS DE APOLONIO: CPR (1)
Dos soluciones mediante inversión positiva

CPR: Trazar las circunferencias tangentes a una circunferencia y a una recta que pasan por un punto exterior a ambas.



ENUNCIADO

Este problema puede ser resuelto mediante distintos métodos. No obstante vamos a desarrollar el método reductivo mediante INVERSIÓN. Se trata invertir la circunferencia dada en la recta,mediante inversión negativa, lo cual nos dará como soluciones dos circunferencias tg. que contienen a la cir. dada. De este modo reducimós el problema a PPR. Este método nos ofrece dos soluciones de las cuatro posibles



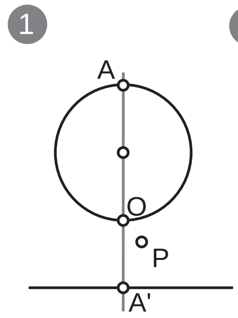
4 SOLUCIÓNES

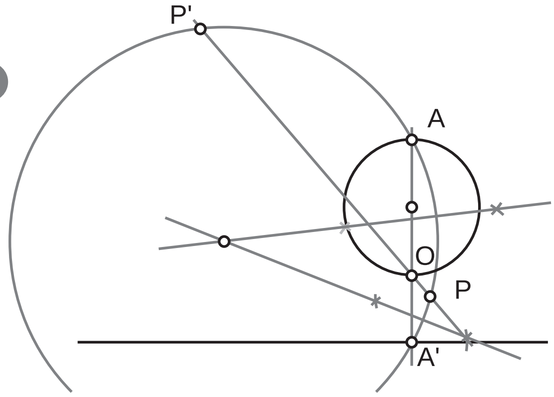
Inversión negativa, k<0. Dos soluciones: circunferencias tangentes que contienen a la dada

1º- Trazamos una perpendicular a la recta dada pasando por el centro de la cir. Situamos en el extremo inferior el centro de inversión (O) siendo el extremo superior del diámetro A y el punto de intersección con la recta dada su inverso A'. Así la recta es la inversa de la circunferencia.

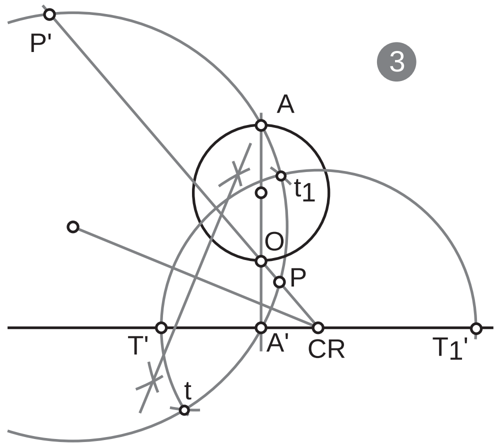
2º- Hallamos el inverso de P: Trazamos una circunferencia (con centro en la interseccion de las mediatrices de AP y PA') que pasa por A-A'-P. Trazamos la recta OP que corta a la última circunferencia en el inverso de P, P'.

A partir de aquí resolveremos el problema PP'R





Con el fin de observar mejor los siguientes pasos, que pueden ser en parte estudiados en el procedimiento de PPR, hemos eliminado los trazados auxiliares empleados hasta ahora, exceptuando la cir. PP'AA', para quedarnos con PP'R (también hemos dejado visible la cir. del enunciado, que por el momento no va a intervenir en el proceso.

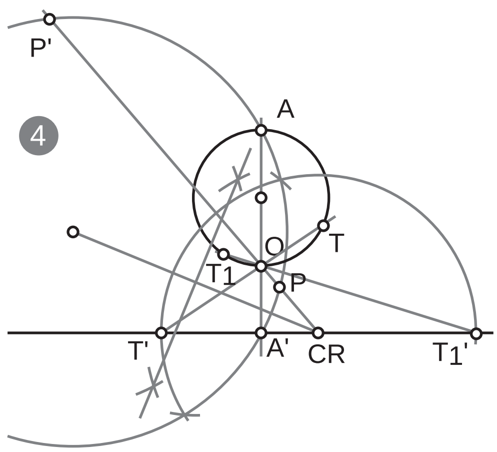


3º- PP' es un eje radical auxiliar que corta a la recta dada en CR (centro radical auxiliar). trazamos una circunferencia auxiliar que pasa por P-P' (en este caso nos sirve la ya trazada para obtener P') y encontramos los puntos de tangencia de las rectas tangentes desde CR a dicha circunferencia.

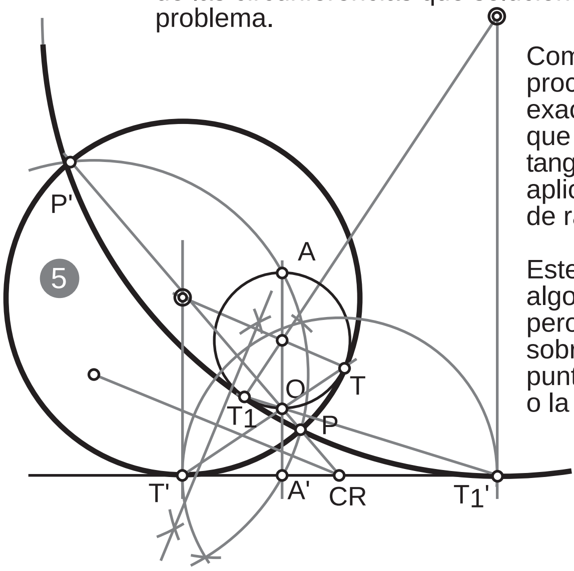
Dichos puntos de tangencia son t y t1 (en minusculas y remarcados con circulos menores). Con centro en CR, abatimos la distancia CR-t (CRt_1) sobre la recta dada obteniendo T_1' y T'. Estos YA son puntos de tangencia de las dos soluciones finales.

Pero a partir de aquí regresamos al problema inicial aprobechando la inversión para encontrar los inversos de estos puntos sobre la primera circunferencia dada.

4º- Alineamos T' y T_1' con O (centro de inversión, encontrando sus inversos sobre la circunferencia, T' y T_1, estos tambien son puntos de tangencia de las soluciones finales.



5º- Alineando T y T_1 con el centro de la cir. dada y trazando perpendiculares a R por los puntos T' y T_1' hallamos intersecciones donde se encuentran los centros de las circunferencias que solucionan la mitad del problema.



Como vemos, el procedimiento es exactamente el mismo que para resolver las cir. tangentes exteriores pero aplicando un ainversión de razon negativa.

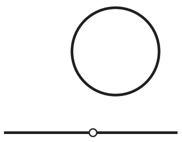
Este procedimiento es algo complejo y largo, pero se simplifica sobremanera cuando el punto está sobre la recta o la circunferencia.

Si conocemos bién el procedimiento de la inversión para el caso estandar de este problema cuando el punto dado es el punto de tangencia sobre la recta o sobre la circunferencia el problema queda simplificado sobremanera. Al transformar la rectaen la circunferencia o vicebersa teniamos tambien que obtener el punto inverso(lo cual rquiere ciertos trazaos auxiliares que complican el ejercicio).

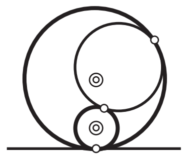
Para estos dos casos, al estar el punto contenido en la recta o la circunferencia, el punto inverso se encontrará sobre su transformada (recta o cricunferencia) lo cual hace posible resolver el problema con muy pocos trazados y muy rápidamente.

CPR: Trazar las circunferencias tangentes a una circunferencia y una recta conocido un **punto de tangencia sobre la recta**. POR INVERSIÓN

ENUNCIADO



SOLUCIÓN

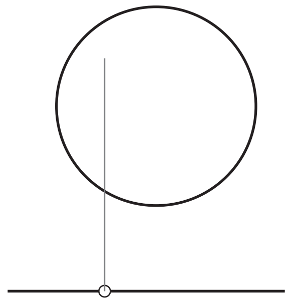


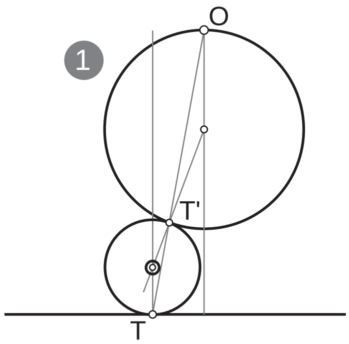
1º- INVERSIÓN POSITIVA: Situamos el centro de inversión (O) en el extremo superior del diámetro perpendicular a la recta. Trazamos una recta desde O pasando por T hasta obtener T' sobre la cir. dada. Y a partir de T' trazamos una recta pasando por el centro de la cir. dada para encontrar el centro de la solución en la intersección de esta con la primera perpendicular a la recta dada.

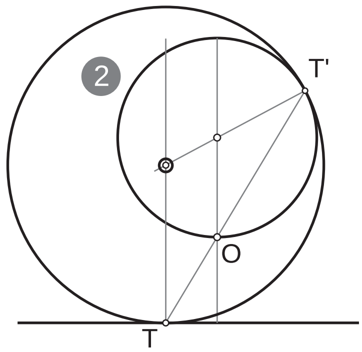
2º- INVERSIÓN NEGATIVA: Situamos el centro de inversión (O) en el extremo superior del diámetro perpendicular a la recta. Trazamos una recta desde O pasando por T hasta obtener T' sobre la cir. dada. A partir de T' trazamos una recta pasando por el centro de la cir. dada para encontrar el centro de la solución en la intersección de esta con la primera perpendicular a la recta dada.

Los centros de la solución en cualquier caso se encontrarán sobre una perpendicular a la recta dada que pasa por el punto de tangencia dado.

A partir de ahí aplicaremos dos inversiones el en problema. 1º Inversión positiva para encontrar una solución (tg. exterior a la cir. dada) y 2º Inversión negativa para enontrar la otra solución (tg que contiene a la cir. dada)



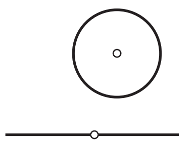




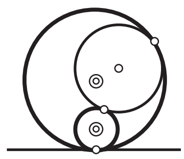
Siendo tan sencilla la resolución de este problema mediante este método nos podemos permitir sin problemas resolver ambas soluciónes en el mismo ejercicio.

CPR: Trazar las circunferencias tangentes a una circunferencia y una recta conocido un **punto de tangencia sobre la circunferencia**. POR INVERSIÓN

ENUNCIADO



SOLUCIÓN

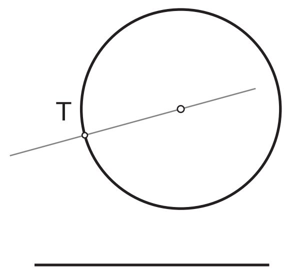


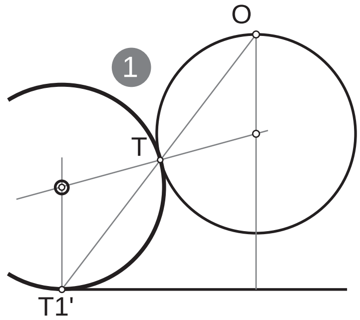
1º- INVERSIÓN POSITIVA: Situamos el centro de inversión (O) en el extremo superior del diámetro perpendicular a la recta. Trazamos una recta desde O pasando por T hasta obtener T1' sobre la recta dada. A partir de T1' trazamos una recta perpendicular a la recta dada para encontrar el centro de la solución en la intersección de esta con la recta que une T y el centro de la cir. dada.

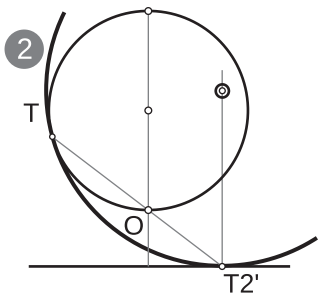
2º- INVERSIÓN NEGATIVA: Situamos el centro de inversión (O) en el extremo inferior del diámetro perpendicular a la recta. Trazamos una recta desde O pasando por T hasta obtener T' sobre la recta dada. A partir de T' trazamos una recta perpendicular a la dada para encontrar el centro de la solución en la intersección de esta con la solución en la intersección de esta con la recta que une T y el centro de la cir. dada.

Los centros de la solución en cualquier caso se encontrarán sobre una recta que pasa por el centro de la cir. y el punto de tangencia dados.

A partir de ahí aplicaremos dos inversiones el en problema. 1º Inversión positiva para encontrar una solución (tg. exterior a la cir. dada) y 2º Inversión negativa para enontrar la otra solución (tg que contiene a la cir. dada)



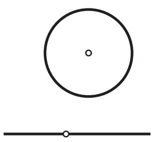




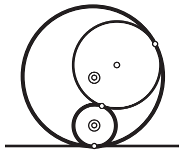
Siendo tan sencilla la resolución de este problema mediante este método nos podemos permitir sin problemas resolver ambas soluciónes en el mismo ejercicio.
Ambos problemas se resuelven mediante el mismo método, pero adaptado a los datos del enunciado.

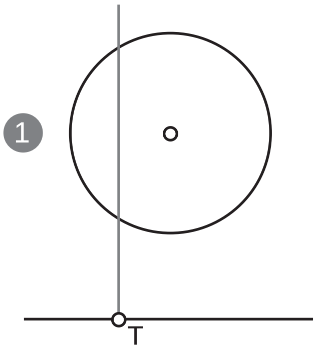
CPR: Trazar las circunferencias tangentes a una circunferencia y una recta conocido un **punto de tangencia sobre la recta**. POR POTENCIA.

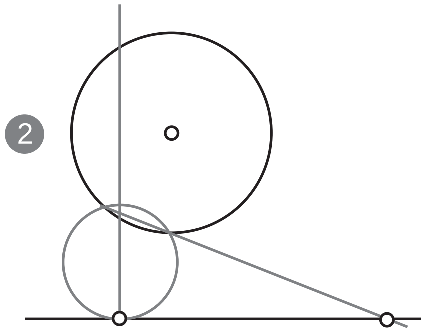
ENUNCIADO



SOLUCION



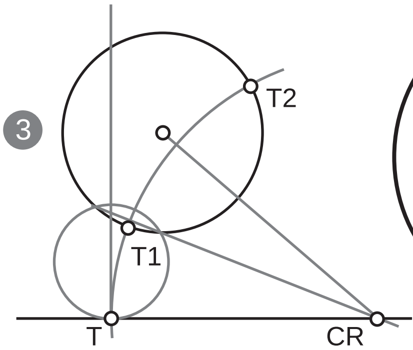


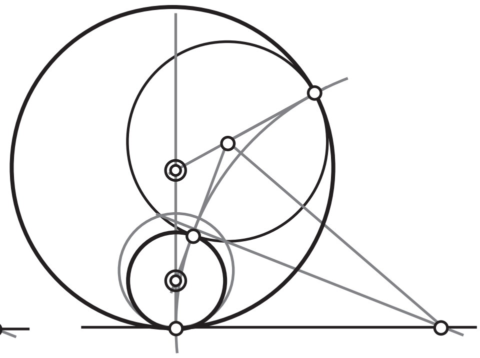


1º- La perpendicular por el punto T dado a la recta dada contiene los centros d etodas las circunferencias tangetes a la recta por el punto dado.

2º. Con centro arbitrario trazamos una cir. que pasa por T y corta a la cir dada en dos puntos, trazamos el eje radical de ambas cir. cobteniendo sobre la recta dada un Centro radical Auxiliar CR.

3º- Llevamos el valor constante CR-T a la cir. dada haciendo centro en CR, con radio CR-T para obtener T1 y T2 sobre la cir dada. T1 y T2 son los puntos de tangencia de las rectas tangentes a la cir. dada que pasan por CR.

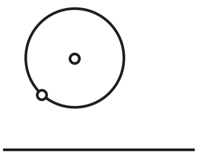




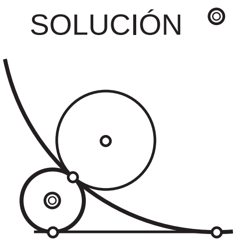
4º- T1 y T2 son los puntos de tangencia sobre la circunferencia dada de las cir.de la solución. Así pues solo nos queda alinear T1 y T2 con el centro de la cir. dada para obtener sobre la perpendicular los centros de las soluciones.

CPR: Trazar las circunferencias tangentes a una circunferencia y una recta conocido un **punto de tangencia sobre la circunferencia**. POR POTENCIA.

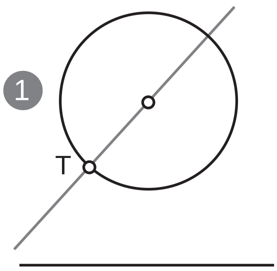
ENUNCIADO

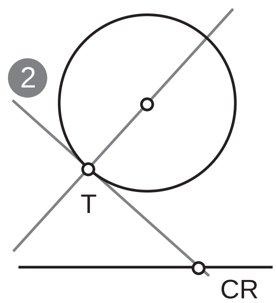


SOLUCIÓN



1º- Trazamos una recta por T y el centro de la circunferencia. En esta estarán los centros de las soluciones.

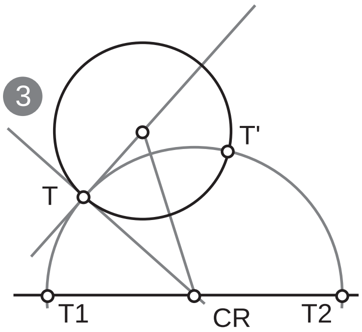


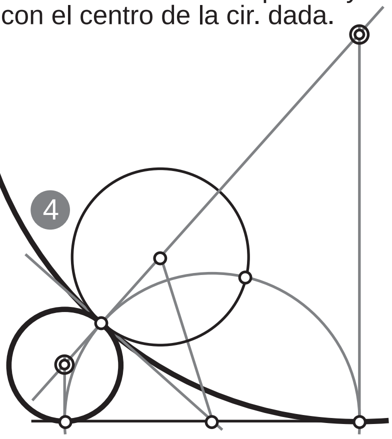


2º- Trazamos por T una perpendicular a la recta que une el centro de la cir dada con T. Esta recta es un eje radical que corta a la recta dada en CR que es el centro radical de las dos circunferencias de la solución y la cir. dada.

3º- Con centro en CR y radio CR-T abatimos esa distancia sobre la recta. Sobre la cir. dada obtenemos T', que en este caso no nos sirve, T y T' son los puntos de tangencia de las rectas tangentes a la cir. dada desde CR. Sobre la recta obtenemos T1 y T2, que son los puntos de tangencia sobre la recta dada de las soluciones.

4º- Solo nos queda trazar perpendiculares a la recta dada por T1 y T2 para hallar los centros de las circunferencias de la solución en la recta que une T con el centro de la cir. dada.





Ambos casos explicados en esta página están resueltos por el mismo procedimiento. Para entenderlos bien es necesario tener claros los conceptos de potencia, eje y centro radical. Conociendolos el procedimiento es muy sencillo y más fácil de memorizar.