

INVERSIÓN

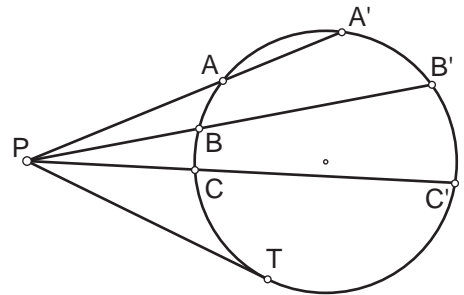
La inversión es una transformación geométrica en la que se cumple que dos puntos son inversos cuando:

- 1º- Están en línea recta con el centro de inversión. A y su inverso A' están alineados con O (centro de inversión)
- 2º. El producto de las distancias (potencia de un punto respecto a una circunferencia) de los puntos respecto al centro de inversión es constante.

RECORDEMOS LA POTENCIA DE UN PUNTO RESPECTO A UNA CIRCUNFERENCIA

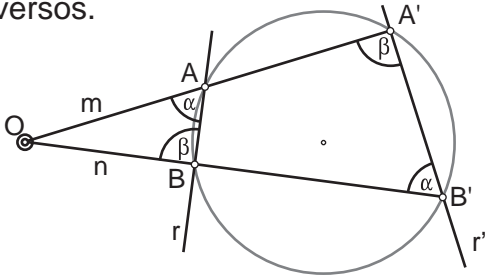
Si fijamos un punto P en el plano y desde este trazamos secantes a una circunferencia, la intersección de las distintas secantes producirá dos puntos A-A', B-B', C-C'...

El producto de las distancias de P a los otros dos puntos es constante e igual al cuadrado de la distancia de P al punto de tangencia con la circunferencia .



$$PA \cdot PA' = PB \cdot PB' = PC \cdot PC' = K = PT^2$$

Por ello, todos los pares de puntos A-A', B-B', etc de la ilustración superior de la potencia son inversos.



Dos pares de puntos inversos (A-A' y B-B') con el mismo centro de inversión determinan siempre una circunferencia (son concíclicos).

Dos pares de rectas inversas r (AB) y r' (A'B') con el mismo centro de inversión son antiparalelas de las rectas que unen los pares de puntos.

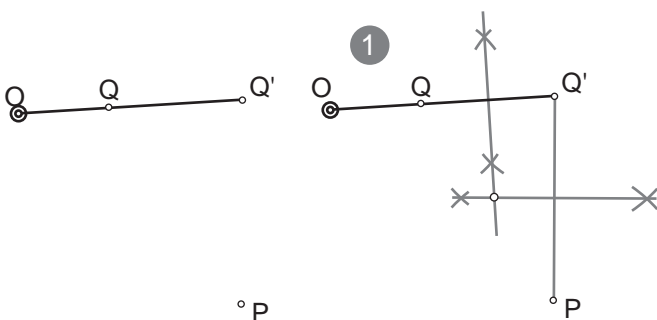
Dos rectas r y r' son **antiparalelas** con otras dos m y n cuando los ángulos que r forma con m y con n, son respectivamente iguales a los que r' forma con n y con m.

La potencia es una propiedad de un punto respecto a una circunferencia, es una relación concreta. La inversión es una transformación que se puede poner en práctica con cualquier punto en el plano una vez queda determinada la constante de la inversión.

UNA INVERSIÓN QUEDA DETERMINADA POR:

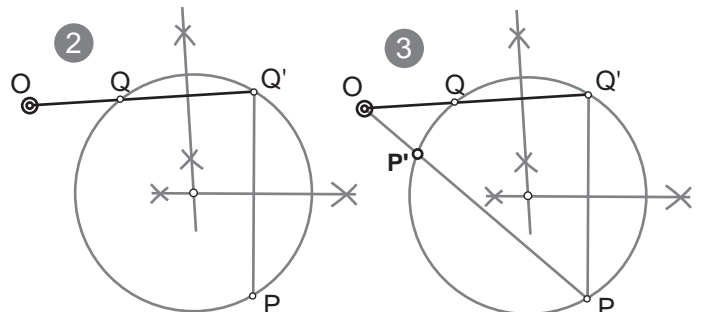
- 1º- Dados el centro y el valor de la inversión (la potencia).
- 2º- Dados el centro y un par de puntos inversos.
- 3º- Dados dos pares de puntos inversos no alineados.

Hallar el punto inverso de P, P', dado el centro de inversión O y dos puntos inversos, Q y Q'



Dado un par de puntos inversos, Q-Q', el centro de inversión y un punto P hallar el punto inverso de P, P'.

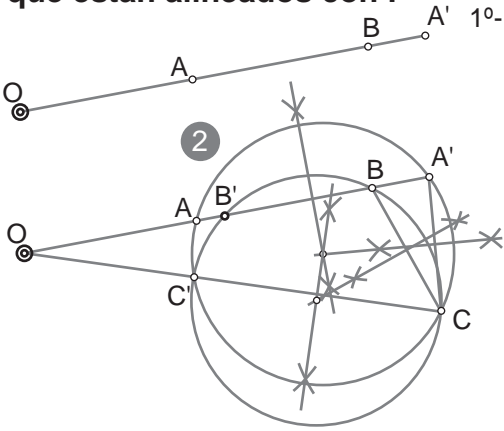
- 1º- Trazamos la mediatriz de QQ' y de Q'P o QP. La finalidad es encontrar el centro de la circunferencia que pasa por P, Q y Q'



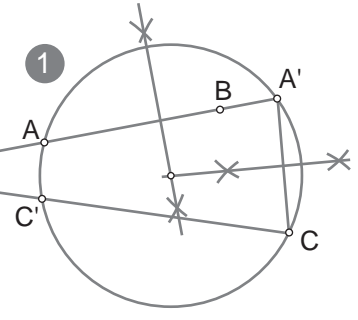
- 2º- Trazamos la circunferencia.

- 3º- Trazamos una recta OP. El segundo punto de intersección con la circunferencia es el punto P' inverso de P.

Hallar el punto inverso de B, B', dado el centro de inversión O y dos puntos inversos, A y A' que están alineados con P



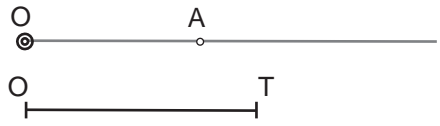
1º-Escogemos un punto C al azar, no alineado con AA'. Trazamos la circunferencia (hallando el centro por medio de mediatrices) que pasa por A-A'-C. Alineando O con C encontramos sobre la circunferencia el punto C', inverso de C.



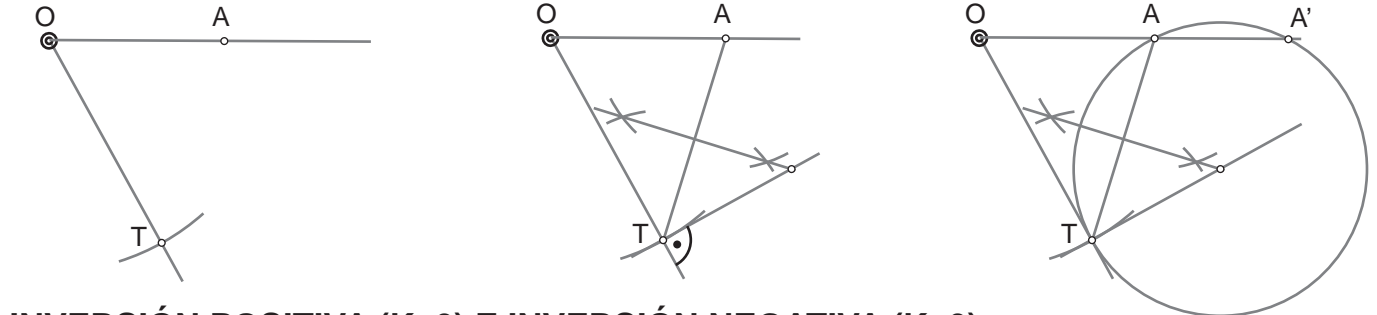
2º-Trazamos la circunferencia que pasa por B, C y C'. Sobre esta, alineado con O encontramos el inverso de B, B'.

Ambas circunferencias cumplen la misma potencia respecto a O, centro de inversión.

Hallar el punto inverso de A, A', dado el centro de inversión O y el valor de la inversión OT

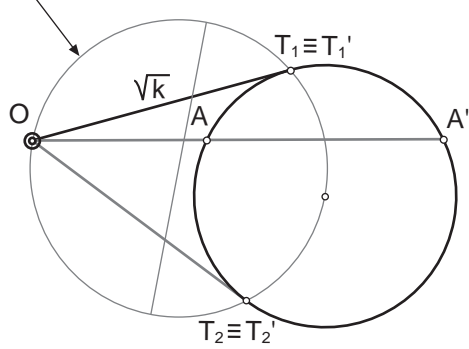


1º- Situamos un punto T, al azar, que cumpla el valor OT dado.
 2º- Trazamos la mediatriz de AT y una perpendicular a OT. El punto de intersección de ambas es el centro de la circunferencia que cumple las propiedades necesarias para resolver el problema. (OT es segmento Tangente a la cir.)
 3º- Trazamos la circunferencia que pasa por A-A'-T. El segundo punto de intersección de la recta OA con dicha circunferencia es A', punto inverso de A.



INVERSIÓN POSITIVA (K>0) E INVERSIÓN NEGATIVA (K<0)

Lugar geométrico de los puntos del plano dobles en esta inversión (O y k)

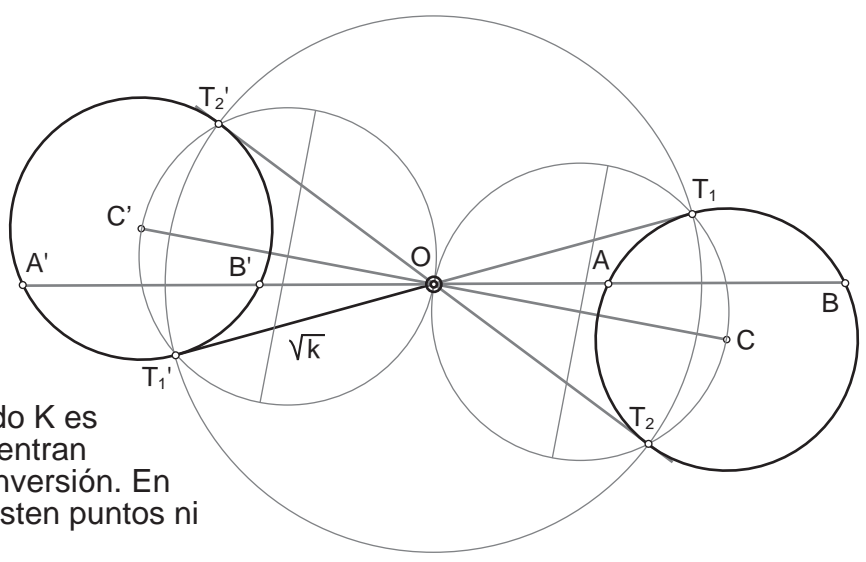


A la izquierda vemos una inversión de un punto A-A' con el valor de la inversión $k > 0$, inversión positiva, pues ambos puntos, original y transformado se encuentran al mismo lado de O y a su vez k parte en el mismo sentido que ambos puntos original y transformado.

T_1 y T_2 son puntos dobles, el transformado y el original coinciden.

Arriba, la circunferencia en negro es la llamada circunferencia de autoinversión o de puntos dobles con una constante $(k) > 0$. En este caso la circunferencia también es doble.

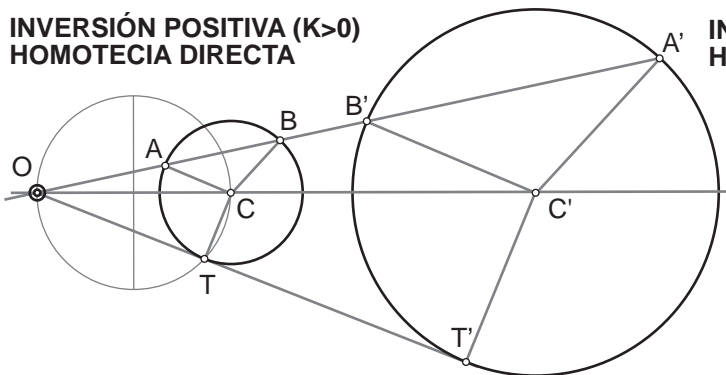
A la derecha observamos como cuando K es negativo, los puntos inversos se encuentran siempre a distinto lado del centro de inversión. En una inversión de valor negativo no existen puntos ni figuras dobles.



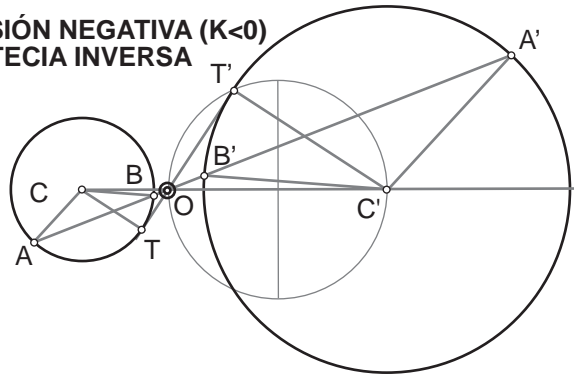
INVERSIÓN Y HOMOTECIA

La circunferencia inversa de una circunferencia que no pasa por el centro de inversión es otra circunferencia. Esta circunferencia tampoco pasa por el centro y es homotética a la primera.

INVERSIÓN POSITIVA ($k > 0$) HOMOTECIA DIRECTA



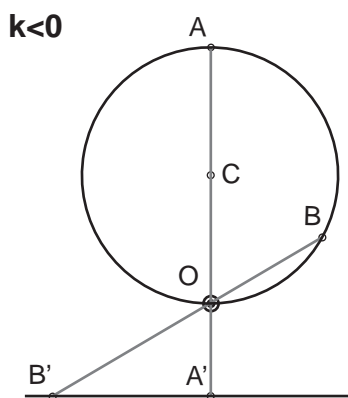
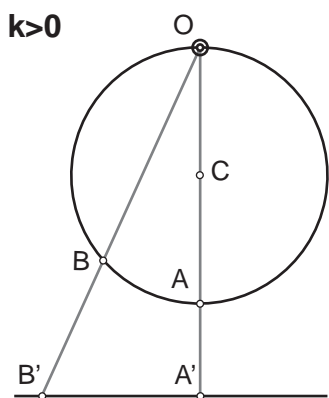
INVERSIÓN NEGATIVA ($k < 0$) HOMOTECIA INVERSA



Dos circunferencias son siempre inversas y homotéticas. Siendo el centro de inversión para $k > 0$ el centro de homotécia directa ($k > 0$) y el centro de inversión negativa para $k < 0$ el centro de homotécia inversa ($k < 0$).

CENTRO DE INVERSIÓN SOBRE LA CIRCUNFERENCIA : CIRCUNFERENCIA-RECTA

“La figura inversa de una recta que no pasa por el centro de inversión es una circunferencia que si que pasa por él”



Dicho de otro modo:

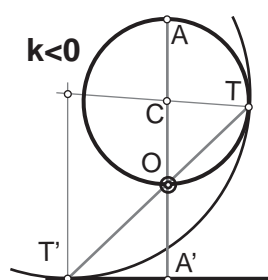
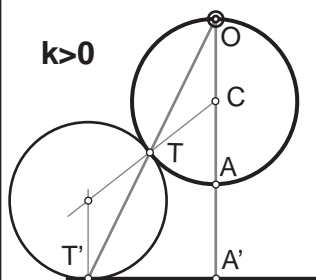
“La figura inversa de una circunferencia que pasa por el centro de inversión es una recta que no pasa por el centro esta recta es siempre perpendicular a la recta que une centro de inversión y centro de la circunferencia.”

La constante de la inversión puede ser mostrada trazando una circunferencia que pase por dos pares de puntos inversos y trazándole a esta su tangente desde el centro de inversión.

En ambas se cumple: $PA \cdot PA' = PB \cdot PB' = \dots = k = PT^2$

APLICACIONES EN PROBLEMAS DE TANGENCIAS

La propiedad fundamental de la inversión para la resolución de problemas de tangencias es que **CONSERVA LOS PUNTOS DE TANGENCIA**: Si dos figuras son tangentes, también lo son sus inversas siendo los puntos de tangencia inversos.



A la izquierda vemos como una circunferencia ha sido transformada en una recta en dos ocasiones, la primera mediante una inversión positiva y la segunda mediante una inversión negativa.

En ambos casos las circunferencias tangentes a ambos elementos son tangentes en puntos inversos.

Abajo dichas propiedades son las mismas a diferencia de que las circunferencias han sido transformadas en otras circunferencias.

Los puntos de tangencia son inversos, al igual que las circunferencias en si mismas. Y por ello están alineados con el centro de inversión.

Cuando la inversión es positiva ambos puntos de tangencia están en el mismo lado respecto al centro de inversión, mientras que si la inversión es negativa se encuentran a distinto lado.

